UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Test du 23/10/20 (Durée : 40 min)

NOM : **PRÉNOM :**

Barème :

- Question de cours : 2 points.
- QCM : dans chacun des six cas :
  - 2 points par affirmation exacte entourée ;
  - -1 point pour une affirmation fausse entourée ;
  - 0 point en l'absence de réponse.

Question de cours

Soit f une fonction réelle définie et bornée sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Soit X une subdivision de $[a, b]$. Qu'appelle-t-on *somme de Darboux inférieure* pour f relativement à la subdivision X ? (Donner la définition.)

QCM : Dans chacun des six cas ci-dessous, entourer **la ou les** affirmations exactes.

$\boxed{1}$ Au voisinage de 0, on a le résultat suivant :

A. $e^{1+x} = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

B. $\sin(\ell n\,(1 + x)) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

C. $\sqrt[3]{7 + \cos x} = 2 - \dfrac{1}{24}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

D. $\dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{6}x + x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

$\boxed{2}$ On a

A. $\ell n\,(1 + n) = \underset{n\to+\infty}{O}(n)$. **B.** $\ell n\,(1 + n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. **C.** $\ell n\,(1 + n) = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$.

$\boxed{3}$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels **positifs**.

A. Si $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{3}{4}$ alors la série $\sum n^3 u_n$ converge.

B. Les séries $\sum u_n$ et $\sum \sin(u_n)$ sont de même nature.

C. Si la série $\sum \min(u_n, v_n)$ converge alors l'une au moins des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ converge.

D. Si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

$\boxed{4}$ Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que f vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta \geqslant 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \big(\, |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big)$$

Parmi les affirmations 1), 2) et 3) ci-dessous, combien sont vraies ?

1) f est nécessairement constante sur $\mathbb{R}$.
2) f est nécessairement continue sur $\mathbb{R}$.
3) f est nécessairement uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

$\boxed{5}$ Soit f une fonction réelle définie et bornée sur l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

A. f est continue sur $[a,b]$ si et seulement si f est uniformément continue sur $[a,b]$.

B. Pour que f soit intégrable sur $[a,b]$ il faut que f soit continue sur $[a,b]$.

C. Une condition nécessaire pour que f soit intégrable sur $[a,b]$ est que f soit une fonction en escalier sur $[a,b]$.

$\boxed{6}$ Soit n un entier naturel. On considère la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+k}$.

Parmi les affirmations 1), 2) et 3) ci-dessous, combien sont vraies ?

1) S_n est une somme de Riemann de $f_1 : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $[1,3]$.
2) S_n est une somme de Riemann de $f_2 : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $[0,2]$.
3) S_n est une somme de Riemann de $f_3 : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $[0,1]$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.