UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Corrigé rapide du test n°2 (Durée : 40 min)

Question de cours

On appelle ***somme de Darboux supérieure*** pour la fonction f et la subdivision X la somme

$$S(f,X)=\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})\sup\{f(x),\ x\in[a_{i-1},a_i]\}.$$

où $X=\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$ avec $a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b$.

1 On a le développement limité au voisinage de 0 suivant :

$\boxed{\textbf{A.}\quad (1+x)^x=1+x^2+x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.}$

Exact : en effet, $(1+x)^x=e^{x\ell n\,(1+x)}=\exp\left(x^2+o(x^2)\right)$. Comme $e^X=1+X+o(X)$, on obtient par composition $(1+x)^x=1+x^2+o(x^2)$.

B. $\ell n\ (1+\cos x)=1-\dfrac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

Faux : en effet $\ell n\ (1+\cos x)\xrightarrow[x\to 0]{}\ell n\,2\neq 1$.

C. $\sqrt{1+\sin x}=1-\dfrac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

Faux : en effet $\sin x=x+o(x)$ et $\sqrt{1+X}=1+\dfrac{1}{2}X+o(X)$ donc, par composition, $\sqrt{1+\sin x}=1+\dfrac{1}{2}x+o(x)$ et il y a donc un terme de degré 1 dans le D.L. à l'ordre 3.

D. $e^{1+x}=2+x+x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

Faux : en effet, $e^{1+x}\xrightarrow[x\to 0]{}e\neq 2$.

2 On a

$\boxed{\textbf{A.}\quad \dfrac{\sin n}{n\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{=}O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right).}$ **B.** $1+e^{-n}\underset{n\to+\infty}{\sim}2-n$. **C.** $\dfrac{\sin n}{n\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

En effet, **A.** est **exact** car $\left|\dfrac{\sin n}{n\sqrt{n}}\right|\leqslant 1.\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, **B.** est **faux** car $1=\lim\limits_{n\to+\infty}1+e^{-n}\neq-\infty=\lim\limits_{n\to+\infty}2-n$, et **C.** est **faux** car $\dfrac{\sin n}{n\sqrt{n}}\div\dfrac{1}{n\sqrt{n}}=\sin n$ ne tend pas vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

A. Si la série $\sum u_n$ converge alors $\sqrt{n}.u_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Faux : en effet, la série $\sum\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (CSSA) mais $(-1)^n$ ne tend pas vers 0.

$\boxed{\textbf{B.}\quad \text{La série } \sum u_n \text{ converge si et seulement si } u_3+u_4+\cdots+u_{n+1} \text{ a une limite finie quand } n \text{ tend vers } +\infty.}$

Exact : En effet, la somme proposée n'est autre que $S_{n+1}-S_2$ où S_n est la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$.

C. Si la série $\sum u_n$ est alternée et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\sum u_n$ converge.

Faux : il manque l'hypothèse $(|u_n|)_n$ décroissante. Un contre-exemple est donné par $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

$\boxed{\textbf{D.}\quad \text{Si } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 0 \text{ et si } \sum u_n \text{ converge alors la série } \sum \ell n\ (1-u_n) \text{ converge.}}$

Exact : En effet, si $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $\ell n\ (1-u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} -u_n$ et le théorème d'équivalence pour les séries positives permet de conclure.

$\boxed{4}$ Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. L'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}$ peut se traduire par la formule :

A. $\forall \varepsilon \geqslant 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (\,|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon)$

Faux : en effet, en autorisant ε à être égal à 0, aucune fonction ne serait uniformément continue.

B. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta \geqslant 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (\,|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon)$

Faux : en effet, en autorisant le choix $\delta = 0$, toutes les fonctions seraient uniformément continues.

$\boxed{\textbf{C.}\quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (\,|x-y| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon)}$

Exact. On peut même remplacer les deux inégalités larges par des inégalités strictes.

D. Aucune des trois formules précédentes.

Faux d'après ce qui précède.

$\boxed{5}$ Soit f une fonction réelle définie et bornée sur l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

A. Si f est continue sur tous les segments $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$

Faux : La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ (donc sur tous les segments de $\mathbb{R}$) mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

B. Pour que f soit intégrable sur $[a,b]$ il faut que f soit continue par morceaux sur $[a,b]$.

Faux : il ne s'agit que d'une condition suffisante.

$\boxed{\textbf{C.}\quad \text{Une condition suffisante pour que } f \text{ soit intégrable sur } [a,b] \text{ est que } f \text{ soit une fonction}}$
$\boxed{\text{en escalier sur } [a,b].}$

Exact : il s'agit d'un théorème du cours.

$\boxed{6}$ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[0,2]$. Alors nécessairement :

A. $\displaystyle\int_0^1 f \leqslant \int_0^2 f.$

Faux : prendre $f : x \longmapsto -1$.

B. $\displaystyle\int_0^2 f^2 \leqslant \left(\int_0^2 f\right)^2.$

Faux : Faire un dessin ou prendre $f : x \longmapsto \sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)$.

C. Si f n'est pas la fonction nulle et si $\displaystyle\int_0^2 f > 0$ alors f est positive sur $[0,2]$.

Faux : Faire un dessin ou prendre $f : x \longmapsto 2x-1$.

$\boxed{\textbf{D.}\quad \text{Aucun des trois résultats précédents.}}$

Exact d'après ce qui précède.