UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Test du 21/10/18 (Durée : 40 min)

NOM : **PRÉNOM :**

Barème :

- Question de cours : 2 points.
- QCM : dans chacun des six cas :
  - 2 points par affirmation exacte entourée ;
  - -1 point pour une affirmation fausse entourée ;
  - 0 point en l'absence de réponse.

Question de cours

Soit f une fonction réelle définie et bornée sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Soit X une subdivision de $[a, b]$. Qu'appelle-t-on *somme de Darboux supérieure* pour f relativement à la subdivision X ? (Donner la définition.)

QCM : Dans chacun des six cas ci-dessous, entourer **la ou les** affirmations exactes.

---

1 On a le développement limité au voisinage de 0 suivant :

A. $(1+x)^x = 1 + x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

B. $\ell n\ (1+\cos x) = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

C. $\sqrt{1+\sin x} = 1 - \dfrac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

D. $e^{1+x} = 2 + x + x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

2 On a

A. $\dfrac{\sin n}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

B. $1+e^{-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2-n$.

C. $\dfrac{\sin n}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

A. Si la série $\sum u_n$ converge alors $\sqrt{n}.u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

B. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $u_3 + u_4 + \cdots + u_{n+1}$ a une limite finie quand n tend vers $+\infty$.

C. Si la série $\sum u_n$ est alternée et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\sum u_n$ converge.

D. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 0$ et si $\sum u_n$ converge alors la série $\sum \ell n\ (1 - u_n)$ converge.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. L'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}$ peut se traduire par la formule :

A. $\forall \varepsilon \geqslant 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \big(|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big)$

B. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta \geqslant 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \big(|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big)$

C. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \big(|x-y| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon\big)$

D. Aucune des trois formules précédentes.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Soit f une fonction réelle définie et bornée sur l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

A. Si f est continue sur tous les segments $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

B. Pour que f soit intégrable sur $[a,b]$ il faut que f soit continue par morceaux sur $[a,b]$.

C. Une condition suffisante pour que f soit intégrable sur $[a,b]$ est que f soit une fonction en escalier sur $[a,b]$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[0,2]$. Alors nécessairement :

A. $\displaystyle\int_0^1 f \leqslant \int_0^2 f$.

B. $\displaystyle\int_0^2 f^2 \leqslant \left(\int_0^2 f\right)^2$.

C. Si f n'est pas la fonction nulle et si $\displaystyle\int_0^2 f > 0$ alors f est positive sur $[0,2]$.

D. Aucun des trois résultats précédents.