UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Test du 26/10/18 (Durée : 40 min)

NOM : **PRÉNOM :**

Barème :

- Question de cours : 2 points.
- QCM : dans chacun des sept cas :
  - 2 points par affirmation exacte entourée ;
  - -1 point pour une affirmation fausse entourée ;
  - 0 point en l'absence de réponse.

Question de cours

On se donne un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Quand dit-on qu'une fonction f, à valeurs réelles, est *continue par morceaux* sur $[a, b]$? (Donner la définition.)

QCM : Dans chacun des sept cas ci-dessous, entourer **la ou les** affirmations exactes.

---

1 On a le développement limité au voisinage de 0 suivant :

A. $(1+x)^{2x} = 1 + 2x^2 + 2x(2x-1)\dfrac{x^2}{2} + x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

B. $\sqrt{1+\cos x} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{4}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

C. $\ell n\,(\cos x) = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

D. $\ell n\,(x + e^x) = 2x - \dfrac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

2 On a l'égalité suivante :

A. $\dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{3} + x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

B. $\cos\left(\dfrac{1}{3x}\right) = 1 - \dfrac{1}{6x^2} + \dfrac{1}{x^2}\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to +\infty} \varepsilon(x) = 0$.

C. $\dfrac{x^2}{1-x^2} = -1 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to +\infty} \varepsilon(x) = 0$.

$\boxed{\mathbf{3}}$

A. $\dfrac{\ell n\, n}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. **B.** $1+e^{-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1-\dfrac{1}{n}$. **C.** $\dfrac{\ell n\, n}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

A. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si, à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

B. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $u_2 + u_3 + \cdots + u_{n+2}$ a une limite finie quand n tend vers $+\infty$.

C. Si $0 < a < 1$ alors la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^a}$ diverge.

D. Si la série $\sum u_n$ converge alors la série $\sum \sin(u_n)$ converge.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Soit f une fonction réelle définie et bornée sur l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

A. Si f n'est pas uniformément continue sur $[a,b]$, alors f n'est pas continue sur $[a,b]$.

B. Une condition nécessaire pour que la fonction f soit intégrable sur $[a,b]$ est que f soit continue sur $[a,b]$.

C. Pour que f soit intégrable sur $[a,b]$ il faut que f soit continue par morceaux sur $[a,b]$.

D. Il suffit que f soit uniformément continue sur $[a,b]$ pour que f soit intégrable sur $[a,b]$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Soit f l'application de $[0,1]$ dans $[0,1]$ qui à x associe x^2. Soit n un entier. Alors :

A. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{k^2}{8n^3}$ est une somme de Riemann associée à f sur $[0,1]$.

B. $S_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^2$ est une somme de Riemann associée à f sur $[0,1]$.

C. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[0,1]$. Alors nécessairement :

A. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f \leqslant \int_0^1 f$.

B. $\left(\displaystyle\int_0^1 f\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2$.

C. Si f est positive sur $[0,1]$ et si f n'est pas la fonction nulle alors $\displaystyle\int_0^1 f > 0$.

D. Aucun des trois résultats précédents.