UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Test n°2 (Durée : 40 min)

NOM : **PRÉNOM :**

Barème :
- Question de cours : 2 points.
- Questions 1-6 : Entourer l'affirmation exacte.
  - 2 points pour une affirmation exacte entourée ;
  - -1 point pour une affirmation fausse entourée ;
  - 0 point en l'absence de réponse.
- Question 7 : 2 points.

Question de cours

On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle I. Soit $a \in I$. Donner la définition de f négligeable par rapport à g au voisinage de a.

Question n°1

Soit f une fonction définie sur $]-1,1[$ telle que $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x^2)$.
Laquelle des affirmations suivantes est juste ?

A. $2f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + o(x)$.

B. $f(2x) \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + o(x)$.

C. $(f(x))^2 \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + o(x^2)$.

Question n°2

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle qu'au voisinage de 0,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 3 + 2x + 4x^3 + o(x^4).$$

Soit F la primitive sur $\mathbb{R}$ de f telle que $F(0) = 1$. Laquelle des affirmations suivantes est juste ?

A. La dérivée troisième de F en 0 est nulle.

B. $F(x) \underset{x\to 0}{=} 3x + x^2 + x^4 + o(x^5)$.

C. $f'(x) \underset{x\to 0}{=} 2 + 12x^2 + o(x^4)$.

Question n°3

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et f, g, h, k des fonctions définies au voisinage de a.
Laquelle des affirmations suivantes est juste ?

A. Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$, alors nécessairement $f(x) + h(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

B. Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$, $\lambda f(x) + \mu h(x) \underset{x \to a}{\sim} (\lambda + \mu) g(x)$.

C. Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x \to a}{\sim} k(x)$, alors nécessairement $f(x) + h(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) + k(x)$.

Question n°4

Laquelle des affirmations suivantes est juste ?

A. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, \mathrm{d}x = 0$.

B. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, \mathrm{d}x$ est absolument convergente.

C. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, \mathrm{d}x$ est divergente.

Question n°5

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Laquelle des affirmations suivantes est juste ?

A. Si $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, alors l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ converge.

B. Si l'intégrale de f sur $[1, +\infty[$ converge, alors l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ converge.

C. Si l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ converge, alors l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ converge.

Question n°6

Laquelle des intégrales proposées converge ?

A. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x \ln(x)} \, \mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x^3 + 2x^4}} \, \mathrm{d}x$.

B. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^3 + 2x^5}} \, \mathrm{d}x$.

D. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\ln(x+3x^4)} \, \mathrm{d}x$.

Question n°7

Calculer, si elle existe, la limite de $\dfrac{\sin(2x)}{1 - \sqrt{1 - 2x}}$ lorsque x tend vers 0. (Justifier votre résultat.)