UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Corrigé rapide du test n°1 (Durée : 40 min)

Question de cours

Sous ces hypothèses, on dit que f ***est dominé par*** g ***au voisinage de*** a quand il existe une constante réelle $K > 0$ et un réel $h > 0$ tels que $\forall x \in I \cap]a-h, a+h[,\ |f(x)| \leqslant K\,|g(x)|$.

1 Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et f, g, h, k des fonctions définies au voisinage de a.

A. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) = \underset{x\to a}{O}(h(x))$, alors nécessairement $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.
Faux : considérer par exemple $f(x) = g(x) = x$ et $h(x) = 2x$ avec $a = +\infty$.

$\boxed{\textbf{B.}\ \text{Si } f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \text{ et } h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x), \text{ alors nécessairement } f(x)+h(x) \underset{x\to a}{\sim} 2g(x).}$
Exact : on peut en effet écrire $f(x) = g(x)\varphi_1(x)$ et $h(x) = g(x)\varphi_2(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varphi_1(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi_2(x) = 1$ et donc $f(x)+h(x) = 2g(x)\varphi(x)$ où $\varphi(x) = \dfrac{\varphi_1(x)+\varphi_2(x)}{2} \xrightarrow[x\to a]{} 1$.

C. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{\sim} k(x)$, alors nécessairement $f(x)+h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)+k(x)$.
Faux : par exemple $x-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x+1$ et $4-x \underset{x\to+\infty}{\sim} -x$ mais $3 \underset{x\to+\infty}{\not\sim} 1$.

2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(0) = 2$ et, pour $x \neq 0$, $f(x) = 2 - 3x + x^4 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
f admet au voisinage de 0 un développement limité :

A. à l'ordre 1 et seulement à l'ordre 1.

$\boxed{\textbf{B.}\ \text{à l'ordre 2 donné par } f(x) = 2 - 3x + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.}$

$\boxed{\textbf{C.}\ \text{à l'ordre 3 donné par } f(x) = 2 - 3x + x^3\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.}$

D. à l'ordre 4 donné par $f(x) = 2 - 3x + x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.
On a en effet $f(x) = 2 - 3x + x^3\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = x\sin\frac{1}{x}$ donc $|\varepsilon(x)| \leqslant |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. f a donc bien le développement à l'ordre 3 annoncé. Son développement à l'ordre 2 est alors obtenu en tronquant à l'ordre 2 sa partie régulière. f n'a par contre pas le DL à l'ordre 4 annoncé car on aurait sinon $\varepsilon(x) = \sin\frac{1}{x}$ qui ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0.

3 On suppose que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet au voisinage de 0 le développement limité suivant :
$f(x) = 1 - 3x + 6x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

$\boxed{\textbf{A.}\ \text{On est sûr que } f \text{ est dérivable en 0 et on a } f'(0) = -3.}$
Exact : On a $f(0) = 1$ et $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -3 + 6x + x\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -3$.

B. On est sûr que f est deux fois dérivable en 0 et on a $f''(0) = 6$.
Faux : une fonction peut très bien ne pas être deux fois dérivable en 0 et admettre tout de même un développement limité d'ordre 2 en 0. C'est par exemple le cas de $f : x \mapsto x^3 \sin\frac{1}{x}$.

C. On est sûr que f est deux fois dérivable en 0 et on a $f''(0) = 12$.
Faux : Voir **B.**

$\boxed{\textbf{D.}\ \text{On a l'équivalence suivante : } f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1 - 2x^2}$
Exact : Il est en effet clair que $\dfrac{f(x)}{1-2x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

4 On considère deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant en 0 les développements limités suivants : $f(x) = 2x - x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$ et $g(x) = 1 + x - x^2 + x^2\varepsilon(x)$. On est sûr que :

A. La fonction $f + g$ admet en 0 un développement limité à l'ordre 3.

Faux : On ne peut ajouter que des développements limités de même ordre.

B. La fonction fg admet en 0 un développement limité à l'ordre 3.

Exact puisque l'on peut mettre x en facteur dans le DL de f. Dans la pratique, on a ici $(fg)(x) = 2x + x^2 - 2x^3 + x^3\varepsilon(x)$

C. La fonction $\dfrac{f}{g}$ admet en 0 un développement limité à l'ordre 2.

Exact puisque f et g on un DL à l'ordre 2 en 0 et que $g(0) \neq 0$.

D. La fonction $f \circ g$ admet en 0 un développement limité à l'ordre 2.

Faux : on a $g(0) = 1 \neq 0$ donc rien n'assure que $f \circ g$ ait un DL en 0.

5 On suppose que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet au voisinage de 0 le développement limité suivant : $f(x) = 1 - 3x + 6x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Alors :

A. $f(1 + x) = 4 + 9x + 6x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

Faux : car $1 + x$ ne s'annule pas lorsque $x = 0$ et on ne peut donc pas substituer.

B. $f(x^2) = 1 - 3x^2 + 6x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

Exact : il suffit de remplacer x par x^2 dans l'expression de $f(x)$ et de constater que $\varepsilon(x^2) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

C. $\left(f(x)\right)^2 = 1 - 6x + 21x^2 - 36x^3 + 36x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

Faux : on ne peut obtenir un développement limité de $\left(f(x)\right)^2$ qu'à l'ordre 2.

6 Le développement limité de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 2 en 0 est :

A. $1 + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

B. $1 - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

C. Aucun des deux résultats précédents.

En effet, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\dfrac{1}{1 + X} = 1 - X + X\varepsilon_2(X)$ donc, par substitution (puisque $X = \dfrac{x^2}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$), $f(x) = 1 - (-\dfrac{x^2}{2}) + x^2\varepsilon(x)$.

7 La limite lorsque x tend vers 0^+ de $\dfrac{\ell n\,(2\sin x)}{\ell n\, x}$ est :

A. $\ell n\,(2)$. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

En effet, $\dfrac{\ell n\,(2\sin x)}{\ell n\, x} = \dfrac{\ell n\, 2 + \ell n\,(\frac{\sin x}{x}) + \ell n\, x}{\ell n\, x} = 1 + \dfrac{\ell n\, 2 + \ell n\,(\frac{\sin x}{x})}{\ell n\, x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$ puisque $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.