UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Test n°1 - CORRIGÉ

Question de cours : Énoncer l'inégalité des accroissements finis.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, telle que f dérivable sur $]a, b[$ et f' bornée par M sur $]a, b[$. Alors

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|.$$

Question n°1

Laquelle des affirmations suivantes est juste.

A. Il existe une fonction f dérivable sur $[0, 2]$ telle que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ et $f'(x) \leqslant 2$ pour tout x.
D'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour tout $(x, y) \in [0, 2]^2$ $|f(x) - f(y)| \leqslant 2|x - y|$. Or $f(2) - f(0) = 5 > 2 \times 2$. Impossible.

B. Il existe une fonction f dérivable sur $[0, 2]$ telle que $f(0) = -1$, $f(2) = -1$ et $f'(x) > 2$ pour tout x.
Si $f'(x) > 2$ pour tout x, la fonction est strictement croissante, c'est donc impossible.

C. Il existe une fonction f dérivable sur $[0, 2]$ telle que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ et $f'(x) > 2$ pour tout x.
Par exemple, $f(x) = \frac{5}{2}x - 1$. On a bien $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ et $f'(x) = \frac{5}{2} > 2$.

Question n°2

Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et $f''(x) \leqslant 0$ pour $x \in]a, b[$. Alors, nécessairement,

A. Pour tout $x \in [a, b]$, $f'(x) \geqslant 0$.
Non, car $f(x) = \frac{(b-a)^2}{4} - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$, vérifie $f(a) = f(b) = 0$ et $f''(x) = -2 < 0$, mais $f'(x) = -2x$. Par conséquent si $b > 0$, f' n'est pas toujours positif.

B. f est décroissante sur $[a, b]$.
Non, on reprend la fonction précédente, et on remarque qu'elle est croissante sur $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$.

C. Pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant 0$.
En effet, comme $f'' \leqslant 0$, f' est décroissante. Par ailleurs, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. Par conséquent, $f'(x) \geqslant 0$ sur $[a, c]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $[c, b]$. On a donc $f(a) = 0 = f(b)$ et f croissante sur $[a, c]$ et décroissante sur $[c, b]$. Ceci implique que f est positive sur $[a, b]$. La fonction est en fait concave.

Question n°3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. La fonction est uniformément continue sur I si

A. I est un segment.
Oui, il s'agit du théorème de Heine.

B. f est bornée sur I.
Non, voir l'exemple du cours $f(x) = \sin(1/x)$ sur $]0, 1]$.

C. f est dérivable sur I.
Non, voir les exemples $f(x) = \sin(1/x)$ sur $]0, 1]$ ou $f(x) = 1/x$ sur $]0, 1]$.

Question n°4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x} t^2 \ln t \,\mathrm{d}t$. Sa dérivée est donnée par

A. $f'(x) = x^2 \ln x$.

B. $f'(x) = x^2 \ln x + x \ln \sqrt{x}$.

C. $f'(x) = \frac{1}{2}x(2x-1)\ln x$.

D. $f'(x) = x^2 \ln x - \frac{1}{4}\sqrt{x}\ln x$.

On peut écrire $f(x) = F(x) - F(\sqrt{x})$ où F est une primitive de $x \mapsto x^2 \ln(x)$.
Par conséquent, $f'(x) = F'(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}}F'(\sqrt{x})$ avec $F'(x) = x^2\ln(x)$, et donc

$$f(x) = x^2\ln(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}}x\ln(\sqrt{x}) = x^2\ln(x) - \frac{1}{4}\sqrt{x}\ln(x).$$

Question n°5

On considère la fonction $f : x \mapsto x$ sur l'intervalle $I = [0,2]$. Laquelle des affirmations suivantes est juste.

A. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n}$ est une somme de Riemann associée à f sur I.

Non, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n} = \frac{2n+1}{2}$ qui diverge quand $n \to +\infty$.

B. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2}$ converge vers $\frac{1}{2}$ quand $n \to +\infty$.

Non, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2} = \frac{2}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{n}$ est la somme de Riemann de f sur $[0,2]$, qui converge donc vers $\int_0^2 x\,\mathrm{d}x = 2$.

C. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{n^2}$ converge vers 2 quand $n \to +\infty$.

Oui, car $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{n^2} = 4\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}$ est 4 fois la somme de Riemann de f sur $[0,1]$, qui converge donc vers $4\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 2$.

Question n°6

Laquelle des affirmations suivantes est juste.

A. Toute primitive d'une fonction positive ou nulle sur un intervalle est positive ou nulle.

Non, prendre $f(x) = 1$, dont une primitive est $F(x) = x$ sur $[-1,1]$. F change de signe en 0.

B. Toute primitive d'une fonction négative ou nulle sur un intervalle est décroissante.

En effet, la dérivée de la primitive étant négative, la primitive est décroissante.

C. Toute fonction continue sur un intervalle est la primitive d'une fonction continue.

Non, prendre $f(x) = x^2\sin(1/x)$ et $f(0) = 0$ qui est continue et dérivable sur $[0,1]$, mais sa dérivée n'est pas continue en 0.

Question n°7

Donner une primitive définie sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = \frac{\tan x}{1+\cos^2 x}$.

D'après les règles de Bioche, on peut utiliser n'importe quel changement de variable. En utilisant le changement de variable $t = \cos x$,

$$\int \frac{\tan x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{-\mathrm{d}t}{t(1+t^2)} = -\int\frac{\mathrm{d}t}{t} + \int\frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = -\ln|t| + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + cste$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) + cste = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right) + cste.$$

Si on avait utilisé le changement de variable $t = \tan x$,

$$\int \frac{\tan x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int\frac{t\,\mathrm{d}t}{2+t^2} = \frac{1}{2}\ln(2+t^2) + cste = \frac{1}{2}\ln\left(2+\tan^2 x\right) + cste.$$