UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Test du 27/09/18 (Durée : 40 min)

NOM : **PRÉNOM :**

Barème :

- Question de cours : 2 points.
- QCM : dans chacun des sept cas :
  - 2 points par affirmation exacte entourée ;
  - -1 point pour une affirmation fausse entourée ;
  - 0 point en l'absence de réponse.

Question de cours

On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle ouvert I. Soit $a \in I$.
Donner la définition de f est dominée par g au voisinage de a (que l'on note $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$).

QCM : Dans chacun des sept cas ci-dessous, entourer **la ou les** affirmations exactes.

---

1 Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et f, g, h, k des fonctions définies au voisinage de a.

A. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) = \underset{x\to a}{O}(h(x))$, alors nécessairement $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.

B. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors nécessairement $f(x) + h(x) \underset{x\to a}{\sim} 2g(x)$.

C. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{\sim} k(x)$, alors nécessairement $f(x) + h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) + k(x)$.

2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(0) = 2$ et, pour $x \neq 0$, $f(x) = 2 - 3x + x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
f admet au voisinage de 0 un développement limité :

A. à l'ordre 1 et seulement à l'ordre 1.

B. à l'ordre 2 donné par $f(x) = 2 - 3x + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

C. à l'ordre 3 donné par $f(x) = 2 - 3x + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

D. à l'ordre 4 donné par $f(x) = 2 - 3x + x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

$\boxed{3}$ On suppose que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet au voisinage de 0 le développement limité suivant : $f(x) = 1 - 3x + 6x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

A. On est sûr que f est dérivable en 0 et on a $f'(0) = -3$.

B. On est sûr que f est deux fois dérivable en 0 et on a $f''(0) = 6$.

C. On est sûr que f est deux fois dérivable en 0 et on a $f''(0) = 12$.

D. On a l'équivalence suivante : $f(x) \underset{x\to 0}{\simeq} 1 - 2x^2$.

$\boxed{4}$ On considère deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant en 0 les développements limités suivants : $f(x) = 2x - x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$ et $g(x) = 1 + x - x^2 + x^2\varepsilon(x)$. On est sûr que :

A. La fonction $f + g$ admet en 0 un développement limité à l'ordre 3.

B. La fonction fg admet en 0 un développement limité à l'ordre 3.

C. La fonction $\dfrac{f}{g}$ admet en 0 un développement limité à l'ordre 2.

D. La fonction $f \circ g$ admet en 0 un développement limité à l'ordre 2.

$\boxed{5}$ On suppose que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet au voisinage de 0 le développement limité suivant : $f(x) = 1 - 3x + 6x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Alors :

A. $f(1 + x) = 4 + 9x + 6x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

B. $f(x^2) = 1 - 3x^2 + 6x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

C. $\left(f(x)\right)^2 = 1 - 6x + 21x^2 - 36x^3 + 36x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

$\boxed{6}$ Le développement limité de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 2 en 0 est :

A. $1 + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

B. $1 - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

C. Aucun des deux résultats précédents.

$\boxed{7}$ La limite lorsque x tend vers 0^+ de $\dfrac{\ell n\,(2\sin x)}{\ell n\, x}$ est :

A. $\ell n\,(2)$. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.