UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Feuille d'exercices n°5

Couples de variables aléatoires sur un espace fini

Exercice n°1

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire n boules avec remise. Soit X la variable aléatoire égale au nombre maximum obtenu. Quelle est la loi de X ? (on pourra calculer $P([X \leqslant k])$).

Exercice n°2

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes uniformément réparties sur $\{1, 2, \cdots, n\}$.

1) Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ et $V(X) = \mathbb{E}([X - E(X)]^2)$.

2) Déterminer la loi de $X + Y$ et calculez $\mathbb{E}(X + Y)$.

Exercice n°3

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$, indépendants. Déterminer la loi conjointe des variables aléatoires $X = 1_A$ et $Y = 1_B$ en fonction de $a = \mathbb{P}(A)$ et $b = \mathbb{P}(B)$. En déduire la loi de $Z = X - Y$.

Exercice n°4

N boules numérotées de 1 à N sont réparties dans deux urnes : M dans la première et $N - M$ dans la seconde. Indépendamment, on tire au hasard un numéro entre 1 et N. On change alors la boule de numéro correspondant d'urne. Soit X_n la v.a. égale au nombre de boules dans U_1 après n mouvements.

1) Déterminer les lois de X_0 et X_1 puis la loi de X_{n+1} en fonction de celle de X_n.

2) Prouver que $\mathbb{E}(X_{n+1}) = (1 - \dfrac{2}{N})\mathbb{E}(X_n) + 1$. Calculer alors $\mathbb{E}(X_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Exercice n°5

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $\{0, \cdots, n\}^2$.

1) Déterminer la loi de X, la loi de Y, la loi de $X + Y$.

2) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice n°6

1) Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
Montrer que si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ sont indépendants alors A et B^c le sont aussi.

2) Soit X et Y des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2. On suppose que $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}([X = 1])\mathbb{P}([Y = 1])$. Démontrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice n°7

Soit X et Y deux variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ dont les valeurs possibles sont $X(\Omega) = \{1,2,3,4\}$ et $Y(\Omega) = \{1,2\}$. On suppose que la loi conjointe du couple (X,Y) est donnée par

$$\mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \frac{1}{7}\left(1 - \frac{ij}{30}\right)$$

1) Déterminer les lois marginales de X et de Y.

2) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3) Calculer la variance de Y.

Exercice n°8

On lance deux fois un dé équilibré et on observe les numéros obtenus.

1) Modéliser l'expérience aléatoire.

2) On appelle X le nombre de résultats pairs obtenus, Y le nombre de 5 obtenus. Trouver la loi du couple (X,Y), les lois des variables X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice n°9

Deux dés cubiques équilibrés (un vert et un rouge) sont lancés. Soit X (respectivement Y) la variable donnant le résultat du dé vert (respectivement rouge).

1) Donner la loi du couple (X,Y) et les lois marginales de X et Y. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

2) Donner les lois des variables aléatoires $M = \max(X,Y)$ et $m = \min(X,Y)$ ainsi que celle du couple (M,m). Les variables aléatoires M et m sont-elles indépendantes ?

3) Donner la loi de probabilité conditionnelle de X sachant que m vaut 3 ou 4.

4) Étudier l'indépendance des variables aléatoires X et m.

Variables aléatoires discrètes

Exercice n°10

1) Sur Ω dénombrable, existe-t-il une probabilité rendant tous les résultats équiprobables ?

2) Montrer que la donnée des $p_n = \frac{1}{n(n+1)}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ définit une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

Exercice n°11

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telles que, pour un réel a donné,

$$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \frac{a}{2^{i+j}}$$

1) Calculer a.

2) Déterminer les lois marginales de X et Y.

3) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice n°12

Soit deux réels C et q ; on suppose qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(\{n\}) = Cq^n$.

1) Montrer que $q \in [0,1[$. Quelle relation lie C et q ?

2) On suppose à présent que $C = q = \frac{1}{2}$, et on note A_k l'ensemble des entiers multiples de k. Calculer $\mathbb{P}(A_k)$.

Exercice n°13

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p où $p \in]0, 1[$.

1) On pose $A_n = \{\omega \in \Omega | X_n(\omega) \neq X_{n-1}(\omega)\}$. Calculer $\mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1})$ pour $n \geqslant 2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les A_n soient indépendants.

2) On pose $Y(\omega) = \inf \{n \geqslant 2 | \omega \in A_n\}$. Exprimer $[Y = r]$ à l'aide des X_i et en déduire la loi de Y. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $Var(Y)$ lorsque $p = \dfrac{1}{2}$.

Exercice n°14

Au jeu des petits chevaux, pour débuter le jeu il faut obtenir un 6. On lance un dé jusqu'à obtenir un 6. On note X le nombre de lancers nécessaires.

1) Quel est l'ensemble des valeurs de X ? Trouver la loi de X.

2) Calculer la probabilité de devoir faire au moins trois lancers pour avoir un 6.

Exercice n°15

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes, indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X = k]) = p_k$$

Donner une expression de $\mathbb{P}([X = Y])$ puis de $\mathbb{P}([X > Y])$. Effectuer le calcul lorsque X suit une loi géométrique de paramètre p.

Exercice n°16

Soit $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $0 < p \leqslant 1$. Soit T la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ définie par : $T(\omega) = \inf \{k | 1 \leqslant k \leqslant n,\ X_k(\omega) = 1\}$ si cet ensemble est non vide et $T(\omega) = +\infty$ dans le cas contraire.

1) Si les variables aléatoires X_i sont interprétées comme les résultats de n jeux de pile ou face indépendants, expliquer la signification de T.

2) Calculer $P([T = k])$ pour k allant de 1 à n et $P([T = +\infty])$.

3) Déterminer les limites des probabilités précédentes lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice n°17

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi : $\forall k \in \mathbb{N},\ P([X = k]) = q^k(1 - q)$.
Soit $Z = \text{Max}(X, Y)$. Déterminer la loi conjointe de Z et X puis la loi de Z.

Exercice n°18 (*Examen de juin 2019*)

Une urne contient sept boules blanches et quatre boules rouges indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise une boule de cette urne et on observe sa couleur. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à l'événement $[X = n]$. Modéliser l'expérience correspondante et calculer $\mathbb{P}([X = n])$. En déduire la loi de probabilité de X.

2) Montrer que X admet une espérance. Calculer cette espérance.

3) Pour n et k dans $\mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{P}_{[X>n]}([X = k + n]) = \mathbb{P}([X = k])$.

Exercice n°19

1) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p. On pose $X = \inf\{n \geqslant 1 | X_n = 1\}$. Quelle est la loi de X ? Son espérance ?

2) On considère à présent une suite (Y_n) de variables aléatoires indépendantes équidistribuées sur $\{1, 2, ..., n\}$. On note Z_r le nombre de tirages à effectuer pour obtenir une suite comportant r numéros distincts. Calculer la loi et l'espérance des variables aléatoires $Z_{r+1} - Z_r$ $(1 \leqslant r \leqslant n-1)$. En déduire la loi et l'espérance de Z.

Exercice n°20

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilité $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à préciser. On suppose que X et Y suivent toutes deux la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$: $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([Y = k]) = p(1-p)^{k-1}$.
On note $U = |X - Y|$ (valeur absolue de $X - Y$) et $V = \min(X, Y)$.

1) Expliciter les ensembles $U(\Omega)$ et $V(\Omega)$. Montrer que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ [U = m, V = n] = [X = m + n, Y = n] \cup [X = n, Y = m + n]$$

En déduire la loi du couple (U, V).

2) Déterminer la loi de U et la loi de V. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice n°21

1) On lance deux dés jusqu'à obtenir un double 6. On note X le nombre de lancers effectués.
Quelle est la loi de X ? Combien de lancers faut-il faire en moyenne pour obtenir un double 6 ?

2) On lance successivement deux dés (A et B). Quand l'un donne 6 on arrête de le lancer et on continue avec le deuxième jusqu'à obtenir 6. On note Y le nombre de lancers effectués, U le nombre de lancers du dé A, V le nombre de lancers du dé B.

a) Quelles sont les lois de U et V. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}([U \leqslant k])$. On suppose que U et V sont indépendantes, donc que $\mathbb{P}([U \leqslant k] \cap [V \leqslant k]) = \mathbb{P}([U \leqslant k])\mathbb{P}([V \leqslant k])$.

b) Donner la loi et l'espérance de Y (on pourra chercher à calculer les $P([Y \leqslant k])$).

Exercice n°22

On suppose que le nombre N de clients se présentant dans une boulangerie un jour fixé suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque client achète une baguette avec la probabilité p. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de baguettes vendues. Déterminez la loi de X sachant $[N = n]$, puis la loi de X.

Exercice n°23

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

1) Montrer que $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

2) Montrer que la loi de X sachant $[X + Y = n]$ est binômiale de paramètres n et $\dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

3) On se donne maintenant une variable aléatoire Z de loi de Poisson de paramètre λ, un paramètre $p \in [0, 1]$ et T une variable aléatoire telle que, pour tous k, ℓ avec $k \leqslant \ell$, on ait :

$$\mathbb{P}_{[Z=l]}([T = k]) = \binom{\ell}{k} p^k (1-p)^{\ell-k}$$

Déterminer la loi de T (indication : écrire l'événement $[T = k]$ comme une réunion d'événements faisant intervenir Z). En déduire la loi de $Z - T$.