UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Feuille d'exercices n°4

Intégrales généralisées

Exercice n°1

Calculer les intégrales suivantes en prenant soin de justifier la convergence :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$$

$$I_4 = \int_0^{+\infty} xe^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x \qquad I_5 = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t \ \ (n \in \mathbb{N}) \qquad I_6 = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$$

$$I_7 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)^2} \qquad I_8 = \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{\cos(2x)+\cos(3x)-2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice n°2

Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,\mathrm{d}x \qquad I_3 = \int_0^1 \ell n\,(t)\,\ell n\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$$

$$I_4 = \int_0^{+\infty} x^\alpha \ell n\,(x)\,\mathrm{d}x\ ,\ \alpha \in \mathbb{R} \qquad I_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad I_6 = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\,\mathrm{d}x\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$I_7 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x\ ,\ \alpha \in \mathbb{R} \qquad I_8 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)\ell n\,|x|}{\sqrt{|x|}(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \qquad I_9 = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ell n\,(1+x)}\,\mathrm{d}x$$

$$I_{10} = \int_1^{+\infty} \frac{\ell n\,(1+x)}{(x^2-1)^\alpha}\,\mathrm{d}x\ ,\ \alpha \in \mathbb{R} \qquad I_{11} = \int_0^1 \frac{x-1}{\ell n\,(x)}\,\mathrm{d}x$$

Exercice n°3

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

1) Étudier la convergence de l'intégrale de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$.

2) On souhaite maintenant calculer cette intégrale.

On introduit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+1)t]}{t}\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t}\,\mathrm{d}t$.

a) Vérifier que l'intégrale I_n est convergente et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) Vérifier que l'intégrale J_n est convergente et que $J_{n+1} = J_n$. En déduire la valeur de J_n.

c) Soit $g :]0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}$.
Montrer que g se prolonge en une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

d) Grâce à une intégration par parties de $I_n - J_n$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (I_n - J_n) = 0$.

e) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

3) On souhaite montrer que l'intégrale de f sur $]0,+\infty[$ n'est pas absolument convergente.

(a) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$ converge puis que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt$ diverge.

(b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|\,\mathrm{d}t$ diverge.

Exercice n°4

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ convergent. Les calculer en fonction de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice n°5 *(Intégrales de Bertrand)*

1) Montrer que $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ell n\, t)^\beta}$ converge si et seulement si $\begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$

2) Montrer que $\displaystyle\int_0 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,|\ell n\, t|^\beta}$ converge si et seulement si $\begin{cases} \alpha < 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$

Exercice n°6 *(Examen de juin 2019)*

Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ell n\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$.

Exercice n°7

Soient $f : t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}\left(1+\dfrac{\sin t}{\ell n\, t}\right)$ et $g : t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$.
Montrer que f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ et que les intégrales sont de natures différentes.

Exercice n°8

Montrer la convergence absolue de $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\left(t^2\sin t - \cos\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ell n\, t)\cos t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice n°9

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Montrer que si f admet en $+\infty$ une limite (finie ou non) alors cette limite est nulle.

Exercice n°10

Trouver un exemple de fonction $f \in \mathscr{C}_m([0,+\infty[,\mathbb{R})$ positive telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et f non bornée.

Exercice n°11

Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a,+\infty[$. On suppose que $\displaystyle\int^{+\infty} f$ converge et que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = 0$. Montrer que f est identiquement nulle sur $[a,+\infty[$.

Exercice n°12

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,+\infty[$. On suppose que $\displaystyle\int^{+\infty} f$ converge. Montrer que la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

Exercice n°13

1) Montrer que $\displaystyle\int_1^x e^t \ell n\, t\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x \ell n\, x$.   **2)** Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$.