UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Feuille d'exercices n°3

Continuité uniforme

Exercice n°1

Étudier la continuité uniforme de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{2 + \sin x}$.

Exercice n°2

Utiliser la définition pour montrer que les fonctions suivantes sont (ou ne sont pas) uniformément continues.

1) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = \sin x$ **2)** $f_2 : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f_2(x) = x^2$ **3)** $f_3 : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ f_3(x) = x^2$

Dans quels cas le théorème de Heine est (ou n'est pas) applicable ?

Exercice n°3

1) Montrer que pour tous réels x et y on a $||y| - |x|| \leqslant |y - x|$. En déduire que $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1 + |x|}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que pour tous réels positifs x et y on a $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$ et $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x-y|}$. En déduire que $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice n°4

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continues et bornées. Montrer que leur produit fg est une fonction uniformément continue. Donner un contre-exemple quand on ne suppose plus que f et g sont bornées.

Exercice n°5

Soit $x_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}$ et $y_n = \sqrt{\dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi}$.

1) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (y_n - x_n) = 0$.

2) Utiliser 1) pour étudier la continuité uniforme de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x^2)$.

Exercice n°6 $(\star\star)$

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie ℓ en $+\infty$.
Montrer que f est bornée puis que f est uniformément continue.

Exercice n°7 $(\star)$

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uniformément continue.

1) Montrer que $|f|$ est uniformément continue.

2) On se propose de montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $f(x) \leqslant ax + b$.

a) Justifier l'existence d'un réel η_1 strictement positif tel que :

$$\exists \eta_1 > 0,\ \forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2,\ (|x - y| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant 1)$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

b) Soit n_0 le plus petit entier tel que $\dfrac{x_0}{n_0} \leqslant \eta_1$; justifier l'existence de n_0 et exprimer n_0 en fonction de x_0 et de η_1.

c) Montrer que $|f(x_0) - f(0)| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} \left| f\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - f\left(\frac{kx_0}{n_0}\right) \right|$

d) Conclure.

3) Utiliser la question 2) pour étudier la continuité uniforme de $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$.

4) La condition de la question 2) est-elle suffisante pour avoir la continuité uniforme ?

Intégrale de Riemann - Sommes de Riemann

Exercice n°8

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

Exercice n°9 *(Sommes de Riemann)*

1) Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ des sommes suivantes :

$$\textbf{(a) } S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \ ; \qquad \textbf{(b) } T_n = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{n+k} \ ; \qquad \textbf{(c) } V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$$

2) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A_n$ avec $A_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$.

3) Trouver un équivalent de $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(n^2+k^2\right)^{1/n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n°10 (*Test de novembre 2018*)

Entourer la ou les affirmation(s) exacte(s).
Soit f l'application de $[0,1]$ dans $[0,1]$ qui à x associe x^2. Soit n un entier. Alors :

A. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{k^2}{8n^3}$ est une somme de Riemann associée à f sur $[0,1]$.

B. $S_n = \displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k^2$ est une somme de Riemann associée à f sur $[0,1]$.

C. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f$.

Exercice n°11 (*Contrôle continu de novembre 2018*)

1) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $R_n = \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right)$.

a) Montrer que R_n est une somme de Riemann d'une fonction que l'on précisera sur un intervalle que l'on précisera.

b) En déduire que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

2) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{kn}\right)$.
Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

Intégrale et relation d'ordre

Exercice n°12 $(\star)$

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel $k > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \ |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y|\,.$$

On pose $\alpha_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$. Montrer que $|\alpha_n| \leqslant \dfrac{k}{2n}$.

Exercice n°13 *(Exercice du cours)*

Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ positive ($f \geqslant 0$) telle qu'il existe $c \in [a,b]$ avec $f(c) > 0$.
Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.

Exercice n°14

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a \leqslant b$ à valeurs réelles telles que, pour tout $x \in [a,b]$, on ait $f(x)g(x) \geqslant 1$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx \geqslant (b-a)^2$.

Formule de Taylor

Exercice n°15

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur $[0,1]$ à valeurs réelles et qui vérifient $|f''(x)| \leqslant 1$ pour tout x de $[0,1]$. Pour $f \in \mathscr{E}$, on pose $A(f) = f(0) - 2f(\frac{1}{2}) + f(1)$. Montrer que A est borné sur $\mathscr{E}$ et déterminer sa borne supérieure sur $\mathscr{E}$. (Appliquer la formule de Taylor entre 0 et $\frac{1}{2}$ et entre $\frac{1}{2}$ et 1.)

Exercice n°16

Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout réel x, $|f(x)| \leqslant 1$ et $|f''(x)| \leqslant 1$. Montrer que, pour tout réel x, $|f'(x)| \leqslant \sqrt{2}$.

Exercice n°17

1) Soit x un réel. Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et que l'on a $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. *On pourra appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction exponentielle.*

2) Rappeler pourquoi la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ell n\,2$.

Calcul d'intégrales

Exercice n°18 *(Calcul de primitives)*

Trouver les primitives suivantes

1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$ **2)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)^2}$ **3)** $\displaystyle\int \sqrt{x^2+x}\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3\cos^2(x)}$ **5)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos(a)\cos(x)}$ **6)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)\sqrt{1-x^2}}$

7) $\displaystyle\int \frac{\sin^3(x)}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ **8)** $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)\sqrt{\cos(2x)}}\,\mathrm{d}x$ **9)** $\displaystyle\int \frac{x\arctan(x)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

10) $\displaystyle\int \sin(2x)\cos(7x)\,\mathrm{d}x$ **11)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3}$ **12)** $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$

Exercice n°19

1) Calculer $\displaystyle\int (\cos 2x + 3\sin 2x)\, e^x \,\mathrm{d}x$.

2) Vérifier que les primitives $\displaystyle\int (\alpha\cos 2x + \beta\sin 2x)\, e^x \,\mathrm{d}x$, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, sont de la forme

$$x \longmapsto (A\cos 2x + B\sin 2x)\, e^x + C$$

avec A, B, C des réels. On précisera les expressions de A et B en fonction de α et β.

Exercice n°20 (Intégration d'une fonction à valeurs complexes)

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\theta}}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

1) Montrer que J_n est réel puis trouver une relation de récurrence entre J_n, J_{n-1} et J_{n-2}.

2) Vérifier que $J_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}\dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice n°21

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$ **2)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1+\cos x+\tan^2 x}\,\mathrm{d}x$ **3)** $\displaystyle\int_0^1 e^{-2x}\cos(nx)\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos 2x\,\mathrm{d}x$ **5)** $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}\,\mathrm{d}x$ **6)** $\displaystyle\int_4^5 \frac{1}{\sqrt{x^2-3x}}\,\mathrm{d}x$

7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$ **8)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ **9)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^5 x\sin x\,\mathrm{d}x$

10) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$ **11)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2\ell n\, x}{(x^3+1)^3}\,\mathrm{d}x$ **12)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2\cosh\, x+\sinh\, x+1}\,\mathrm{d}x$

13) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$ **14)** $\displaystyle\int_1^2 (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$ **15)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

16) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cosh\, x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$ **17)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x$ **18)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

Exercice n°22 (*Examen de juin 2019*)

1) Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(X^2+1)(X^2+3)}$.

2) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(x)}{3\cos^2 x+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice n°23

1) Soit $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(a+b-x)=f(x)$. Exprimer $\displaystyle\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

2) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

Intégrale fonction de sa borne supérieure

Exercice n°24

Montrer que la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_{e^{-x}}^{e^x} \sqrt{1+\ell n^2 t}\, dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice n°25

Soit a un réel fixé. Déterminer les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t + f(1-x) = a$$

Exercice n°26 (*Examen de décembre 2018*)

Soit f la fonction donnée sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \displaystyle\int_{2x}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ell n\,(1+\sqrt{t})} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

1) Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

2) Montrer que f n'est pas dérivable en 0. *On pourra utiliser la formule de la moyenne.*

3) Montrer que pour $x > 2$, $f(x) \geqslant \dfrac{x^2-2x}{\ell n\,(1+x)}$. Que peut-on dire de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$?

Exercice n°27

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ \ell n\, 2 & \text{si} \quad x = 1 \\ \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ell n\, t} & \text{si} \quad x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\end{cases}$

1) Jusifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.

2)a) En utilisant la formule de la moyenne, calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0,\, x\neq 0} f(x)$.

b) La fonction f est-elle continue en 0 ?

3)a) En utilisant un développement limité de $\ell n\, t$ au voisinage de $t = 1$, montrer qu'il existe α dans $]0,1[$ tel que, pour t dans $]1-\alpha, 1+\alpha[$, on ait $(t-1)-(t-1)^2 \leqslant \ell n\, t \leqslant t-1$.

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 1,\, x\neq 1} f(x)$ existe et calculer cette limite.

c) La fonction f est-elle continue en 1 ?

4) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que f est dérivable en 0 et en 1 et calculer les nombres $f'(0)$ et $f'(1)$.

5)
a) Montrer que pour $x > 1$, $\dfrac{x^2-x}{2\ell n\, x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x^2-x}{\ell n\, x}$.

b) Que peut-on dire de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$?

6) Tracer le graphe de f. Ce graphe admet-il une asymptote lorsque x tend bers $+\infty$?

Exercice n°28

Pour tout réel $t \neq 0$, on pose $g(t) = \dfrac{t^2}{t^2 + \sin^2 t}$.

1) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. On notera encore g ce prolongement.

On considère la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} g(t)\ \mathrm{d}t$.

Pour $x \neq 0$ on a donc $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2 + \sin^2 t}\ \mathrm{d}t$. On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

2) Montrer que f est paire.

3) Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$ puis $f'(0)$. Montrer que f est croissante.

4) Pour $x \geqslant 0$, justifier l'encadrement $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+1}\ \mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{2x}\ \mathrm{d}t$. En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote quand x tend vers $+\infty$. Préciser cette asymptote et la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

5) Établir, pour $x \geqslant 0$, l'encadrement $x - \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{2}}{4} \leqslant f(x) \leqslant x$.

Exercice n°29

Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\ \mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est bien définie sur $]0, +\infty[$.

2) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour $x > 0$, $f'(x)$. En déduire les variations de f.

3) En minorant très simplement $\dfrac{e^t}{t}$ sur $[x, 2x]$, montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4) Pour $x > 0$, calculer $I = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}$. En encadrant e^t sur $[x, 2x]$, montrer que f admet une limite quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.