UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Feuille d'exercices n°2

Séries numériques

Exercice n°1

Vérifier les relations suivantes :

a) $\dfrac{\ell n\,(n)}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ **b)** $\dfrac{4n^3 - \sqrt{n^5+3n^4}}{\left(\sqrt{2}n+\sqrt{n}\right)^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ **c)** $\dfrac{\ell n\,(2^{n^2+3n})}{\ell n\,(2^{n\sqrt{n}})} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$

d) $\dfrac{\ell n\,(n^2+n)}{n} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{\ell n\,(n)}{n}\right)$ **e)** $n^4 2^{n^2} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\left(\dfrac{6}{5}\right)^{n^3}\right)$

Exercice n°2

Montrer que la série de terme général u_n est divergente pour :

a) $u_n = (-1)^n$ b) $u_n = \sqrt{n}\,\ell n\,\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$ c) $u_n = \dfrac{e^n n!}{n^n}$ d) $u_n = e^{\sin n}$

Exercice n°3

Étudier la nature des séries suivantes et en cas de convergence calculer la valeur de leur somme (on admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

a) $\displaystyle\sum \frac{1}{(1+n)(n+2)}$ **b)** $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2(1+n)}$ **c)** $\displaystyle\sum \left((n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}\right)$

d) $\displaystyle\sum \frac{n^2+2n-1}{n!}$ **e)** $\displaystyle\sum \ell n\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)$ **f)** $\displaystyle\sum \frac{3n^2+7n+6}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

Exercice du cours

1) Montrer que la convergence d'une suite réelle (u_n) est équivalente à la convergence de la série de terme général $u_n - u_{n-1}$.

2) En déduire que la suite définie, pour $n \geqslant 1$, par $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ell n\, n$ est convergente.

Exercice n°4

Étudier la nature des séries suivantes.

a) $\displaystyle\sum \frac{1}{n^{n+2}}$ **b)** $\displaystyle\sum \frac{3n+2}{5n^2+2n+7}$ **c)** $\displaystyle\sum \frac{n^2+5n-2}{n^5+4n^2+3}$ **d)** $\displaystyle\sum \frac{\sin n}{n^2+3n+1}$

e) $\displaystyle\sum \frac{1}{n(n+\ell n\, n)}$ **f)** $\displaystyle\sum \frac{n!}{(2n)!}$ **g)** $\displaystyle\sum \frac{n!+1}{(n+1)!}$ **h)** $\displaystyle\sum \frac{1}{2^n+3^n}$

i) $\displaystyle\sum \frac{2^n+n}{n2^n}$ **j)** $\displaystyle\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ **k)** $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{n} + \ell n\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$ **l)** $\displaystyle\sum e^{\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$

m) $\displaystyle\sum n^{-(1+\frac{1}{n})}$ **n)** $\displaystyle\sum \frac{n^2+1}{\ell n\,(n)\sqrt{n^6+2n+3}}$ **o)** $\displaystyle\sum n^2 \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ **p)** $\displaystyle\sum \frac{\sqrt{n}\ell n\, n}{n^2+1}$

q) $\displaystyle\sum \sin^2\left(\pi(n+\frac{1}{n})\right)$ **r)** $\displaystyle\sum \frac{\cos(n)\sin(\frac{1}{n^2+1})}{\ell n\, n}$ **s)** $\displaystyle\sum \sqrt{\tan\frac{a}{n} - \sin\frac{a}{n}}$

Exercice n°5 *(Examens 2017/2018)*

1) Étudier la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+n}$.

2) Étudier la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^{n}}{n-2}$.

Exercice n°6

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites de réels. Démontrer les assertions suivantes quand elles sont justes et trouver un contre-exemple quand elles sont fausses.

a) Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum nu_n$ converge.

b) Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum u_n^2$ converge.

c) Si $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum (u_n+v_n)$ diverge.

d) Si $\sum u_n$ converge absolument alors $\sum u_n^2$ converge.

e) Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \frac{1}{u_n}$ diverge.

Exercice n°7

On considère les suites définies par $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

1) Vérifier que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries alternées et que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

2) Étudier la nature de la série $\sum u_n$.

3) Expliquer pourquoi on ne peut pas étudier de la même manière $\sum v_n$.

4) Étudier la nature de la série $\sum (u_n - v_n)$.

5) En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

Exercice n°8

Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes positifs. Montrer que les séries de termes généraux u_n et $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.

Exercice n°9

Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes positifs convergente telle que la suite (u_n) soit décroissante. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 0$. Pour cela, étudier la série de terme général $n(u_{n-1}-u_n)$.

Exercice n°10

Soit $\displaystyle\sum u_n$ et $\displaystyle\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que : $\forall n \geqslant N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

1) Montrer que si $\displaystyle\sum v_n$ converge alors $\displaystyle\sum u_n$ converge.

2) En déduire la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}.\dfrac{1}{2n+2}$ (on prendra $v_n = n^{-\alpha}$avec $1<\alpha<3/2$ et on utilisera le DL à l'ordre 1 de$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} - \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$).

Exercice n°11

Étudier la convergence et la convergence absolue des séries dont le terme général est :

a) $\dfrac{(-1)^n}{n^2+\sin n^2}$ b) $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ c) $\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}$ d) $e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$

e) $\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$ f) $(-1)^n\dfrac{\ell n\, n}{n}$ g) $\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}\right)$ h) $\dfrac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

i) $u_n=\dfrac{1}{n}e^{-u_{n-1}}$, avec $u_0=a\geqslant 0$ j) $\dfrac{(-1)^n}{\ell n\, n+(-1)^n}$ k) $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n^{2/3}+\cos n}$

Exercice n°12 (*Examen de juin 2019*)

Étudier la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{2-n\sqrt{n}}$.

Exercice n°13 (*Contrôle continu de novembre 2019*)

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ dont le terme général est $u_n=n^2\tan\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$.

Exercice n°14 *(Formule de Stirling)*

1) On pose, pour tout entier naturel n, $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^n\,dt$.

a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée.

b) Soit $n\geqslant 2$. Montrer que $nI_n=(n-1)I_{n-2}$. En déduire les expressions de I_{2n} et I_{2n+1} à l'aide de factorielles.

c) Prouver que $I_{n+1}\underset{n\to\infty}{\sim}I_n$.

d) En déduire la formule de Wallis : $\pi=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}(n!)^4}{n.(2n!)^2}$.

2) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ell n\, n-n-\ell n\,(n!)$

a) Montrer que $S_{n+1}-S_n\underset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{1}{12n^2}$. En déduire que la suite (S_n) converge vers un réel λ.

b) Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, $n^ne^{-n}\sqrt{n}\sim e^\lambda n!$

c) À l'aide de la première question, montrer que $\lambda=-\dfrac{1}{2}\ell n\,(2\pi)$. En déduire la ***formule de Stirling*** :

$$n!\underset{n\to\infty}{\sim}n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Exercice n°15 (*Contrôle continu d'octobre 2018*)

Soit a un réel strictement positif. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$u_n=\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^a}\right)\qquad\text{et}\qquad w_n=\frac{(-1)^n}{n^a}$$

On cherche à déterminer la nature (absolument convergente, semi-convergente ou divergente) de la série $\sum u_n$ en fonction des valeurs de a.

1) Montrer que la série $\sum w_n$ est convergente.

2) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$. En déduire les valeurs de a pour lesquelles la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

3) Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \sin x$.
En déduire que si $a \in \left]\frac{1}{3}, 1\right[$ alors la série $\sum u_n$ est semi-convergente.

$\boxed{\textbf{Exercice n°16}}$ (*Contrôle continu d'octobre 2019*)

Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad w_n = \ell n\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

1) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.

2) Montrer qu'aucune des deux séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ n'est absolument convergente.

3) Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

4) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \longmapsto \ell n\,(1 + x)$.
En déduire la nature de la série $\sum w_n$ (on justifiera soigneusement le raisonnement).