

Analyse et Probabilités 3

Feuille d'exercices n°1

Comparaison des fonctions - Développements limités

Exercice n°1

Montrer que : **1)** $x^2 = o_{x \rightarrow 0}(x)$; **2)** $\tan^3 x \sin \frac{1}{x} = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ **3)** $(1+x)^n = 1 + nx + o_{x \rightarrow 0}(x)$, ($n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice n°2

Soit g une fonction définie dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

Montrer que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 < m < n$ on a $g^n(x) = o_{x \rightarrow x_0}(g^m(x))$.

Exercice n°3

Démontrer les propriétés suivantes (tout a lieu quand x tend vers a).

1. Si $f(x) = o(g(x))$, alors $f(x) = O(g(x))$.
2. Si $f(x) \sim g(x)$, alors $f(x) = O(g(x))$.
3. Si $f(x) = O(g(x))$ et $g(x) \sim h(x)$, alors $f(x) = O(h(x))$.
4. Si $f(x) = o(g(x))$ et $g(x) = O(h(x))$, alors $f(x) = o(h(x))$.
5. Si $f_1(x) = o(g(x))$ et $f_2(x) = o(g(x))$, alors $(f_1 + f_2)(x) = o(g(x))$.
6. Si $f_1(x) = o(g_1(x))$ et $f_2(x) = O(g_2(x))$, alors $(f_1 f_2)(x) = o(g_1 g_2)(x)$.

Exercice n°4

Déterminer un équivalent le plus simple possible des fonctions suivantes :

- 1)** $x \mapsto x - 2 + 3 \ln x$ en 0 puis en $+\infty$
- 2)** $x \mapsto \cos(\sin x)$ en 0
- 3)** $x \mapsto \cosh(\sqrt{x})$ en $+\infty$
- 4)** $x \mapsto \frac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x}$ en 0
- 5)** $x \mapsto \ln(\sin x)$ en 0
- 6)** $x \mapsto \ln(\cos x)$ en 0

Exercice n°5

Calculer les développements limités suivants :

- 1)** $f(x) + g(x)$ à l'ordre maximum possible au voisinage de 0, sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4 \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4 \varepsilon_2(x)$$

- 2)** $f(x) + g(x)$ à l'ordre maximum possible au voisinage de 0, sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4 \varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + x^3 \varepsilon_2(x)$$

- 3)** $\sin x + \cosh x$ à l'ordre 6, au voisinage de 0. **4)** $\ln(1+x) + e^x$ à l'ordre 4, au voisinage de 0.
5) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ à l'ordre 4, au voisinage de 0. **6)** $(1+x)^2 + \sinh x$ à l'ordre 5, au voisinage de 0.

Exercice n°6

Calculer les développements limités suivants :

- 1) $f(x)g(x)$ à l'ordre maximum possible au voisinage de 0, sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$$

- 2) $f(x)g(x)$ à l'ordre maximum possible au voisinage de 0, sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 + x^3\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = -3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$$

- 3) $e^x \sin x$ à l'ordre 4, au voisinage de 0.

- 4) $x^2 \cos x$ à l'ordre 6, au voisinage de 0.

- 5) $\sin x \sinh x$ à l'ordre 6, au voisinage de 0.

Exercice n°7

Calculer les développements limités suivants :

- 1) $f \circ g(x)$ à l'ordre maximum possible au voisinage de 0, sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 + x^3\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 2x + x^2 - 2x^3 + x^3\varepsilon_2(x)$$

- 2) $f \circ g(x)$ à l'ordre maximum possible au voisinage de 0, sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 + x^3\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 1 + 2x + x^2 - 2x^3 + x^3\varepsilon_2(x)$$

- 3) $\sin(\ln(1+x))$ à l'ordre 4, au voisinage de 0.

- 4) $\sin(\sinh x)$ à l'ordre 5, au voisinage de 0.

- 5) $\sinh(1 - \cos x)$ à l'ordre 5, au voisinage de 0.

- 6) $\ln(1 + \sinh x)$ à l'ordre 4, au voisinage de 0.

- 7) $(1+x)^{\sin x}$ à l'ordre 4, au voisinage de 0.

- 8) $(1+2x-2x^2)^{\frac{1}{3}}$ à l'ordre 3, au voisinage de 0.

- 9) $\sqrt{\cosh x}$ à l'ordre 4, au voisinage de 0.

- 10) $\tan(1 - \cos x)$ à l'ordre 6, au voisinage de 0.

Exercice n°8

Calculer les développements limités suivants :

- 1) $\frac{f(x)}{g(x)}$ à l'ordre maximum possible au voisinage de 0, sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$$

- 2) $\frac{f(x)}{g(x)}$ à l'ordre maximum possible au voisinage de 0, sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$f(x) = x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = -3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$$

- 3) $\frac{x}{1-x^2}$ à l'ordre 6, au voisinage de 0.

- 4) $\frac{1}{1 + \exp x}$ à l'ordre 4, au voisinage de 0.

- 5) $\tan x$ à l'ordre 5, au voisinage de 0.

- 6) $\frac{1 - \cos x}{\sinh^2 x}$ à l'ordre 4, au voisinage de 0.

Exercice n°9

Calculer les développements limités en zéro suivants :

- 1) $\arctan x$ à l'ordre 5

- 2) $\arccos x$ à l'ordre 5

- 3) $\ln(3+x^2)$ à l'ordre 5

Exercice n°10

- 1) Trouver un développement limité à l'ordre 4 en 0 de la primitive F nulle en 0, de la fonction $x \mapsto e^{\sin x}$.
- 2) On suppose qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(x) = x + f(x)$ possède un développement limité à l'origine, jusqu'à l'ordre 4. Déterminer ce développement limité.
- 3) Soient I, J deux intervalles ouverts contenant l'origine et soit $f : I \rightarrow J$ une fonction indéfiniment dérivable bijective telle que : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On suppose que le développement limité à l'ordre 5 de f en 0 s'écrit : $f(x) = x + a_3x^3 + a_5x^5 + x^5\varepsilon(x)$. Exprimer en fonction de a_3 et a_5 le développement limité à l'ordre 5 de f^{-1} en 0 ($f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id$).
- 4) Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + \sin x)$. Démontrer que f admet au voisinage de zéro une fonction réciproque g de classe \mathcal{C}^∞ .
Déterminer le développement limité de g en 0 à l'ordre 4.

Exercice n°11

Jusqu'à quel ordre les fonctions suivantes admettent-elles des développements limités au voisinage de 0 ?

- 1) $f_1 : x \mapsto x^\pi$ avec $f_1(0) = 0$.
- 2) $f_2 : x \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x}$ avec $f_2(0) = 0$. f_2 est-elle deux fois dérivable en 0 ?
- 3) $f_3 : x \mapsto e^{\frac{-1}{x^2}}$ avec $f_3(0) = 0$.
- 4) $f_4 : x \mapsto x^5 \ln x$ avec $f_4(0) = 0$.

Exercice n°12

Trouver les développements suivants au voisinage des points et aux ordres indiqués :

- 1) e^x au voisinage de 1, à l'ordre 3.
- 2) $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 1, à l'ordre 2.
- 3) $\sin x$ au voisinage de $\pi/4$, à l'ordre 4.
- 4) $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \ln x$ au voisinage de $+\infty$, à l'ordre 4.
- 5) $\ln x$ au voisinage de $a > 0$, à l'ordre 2.
- 6) $(x^2 - 1)/(x^2 + 2x)$ au voisinage de l'infini, à l'ordre 2.

Exercice n°13

Trouver un équivalent (simple) au voisinage de zéro de :

- 1) $\cos x - \cos 2x$
- 2) $\sin x - \tan x$
- 3) $\ln \frac{1+x}{1-x} - \sin 2x - 2x^3$
- 4) $\ln \left(1 - \frac{\exp(x)}{2}\right) - \frac{4x+x^2}{8}$
- 5) $\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
- 6) $x^x - (\sin x)^{\sin x}$

Exercice n°14

Déterminer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{\arccos x}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{1}{e} - \left(\frac{x}{1+x} \right)^x \right]$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \sin x)^{\frac{\ln x}{x}} - x}{x^2 \ln x}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x \cos x}{\tan^2 x}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x + \tan x - 2x}{\arcsin x + \sin x - 2x}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi - 2x} - \tan x$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x} - 1}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \cos \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} \sin^2 \frac{1}{x}$

Exercice n°15

Déterminer les réels a et b tels que la limite pour x tendant vers 0 de $\frac{a\sqrt{1+x^2} + e^{\cos x} + b}{x^4}$ soit finie et calculer cette limite.

Exercice n°16 (*Examen de juin 2018*)

1. Donner les développements limités à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto e^{2x}$ et de $x \mapsto \ln(1+x)$.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \ln(1+e^{2x})$.
3. Déterminer les réels a et b tels que la limite pour x tendant vers 0 de

$$\frac{\ln(1+e^{2x}) + a\sqrt{1-2x} + b}{x^3}$$

soit finie et calculer cette limite.

Exercice n°17 (Examen de juin 2019)

- 1) Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \cos x$. En déduire le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto e^{\cos x}$.
- 2) Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.
- 3) Déterminer les réels a et b tels que la limite pour x tendant vers 0 de $\frac{a\sqrt{1+x^2} + e^{\cos x} + b}{x^4}$ soit finie et calculer cette limite.

Exercice n°18 (Contrôle d'octobre 2019)

- 1) Donner les développements limités à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto e^x$ et de $x \mapsto \sqrt{1+x}$.
- 2) En déduire le développement limité à l'ordre 2 en 0 de :
 - a) $x \mapsto \sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x} - \frac{x}{2}$.
 - b) $x \mapsto e^{3x} - e^{2x} - \sin(x)$.
- 3) En déduire finalement que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x} - \sin(x)}{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x} - x/2} = -4$.

Exercice n°19 (Contrôle d'octobre 2019)

On considère la fonction $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{\tan x}$.

- 1) Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \tan x$.
- 2) Justifier que f admet en 0 un développement limité à l'ordre 2. Donner ce développement.
- 3) En déduire que f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ et que ce prolongement est dérivable en 0. Donner la valeur de $f'(0)$.
- 4) (Question Bonus) Justifier que f' a un développement limité à l'ordre 1 en 0. En déduire que f est deux fois dérivable en 0 et donner la valeur de $f''(0)$.

Exercice n°20

Dans chacun des cas suivants, déterminer les asymptotes à la courbe d'équation $y = f(x)$ et étudier la position de la courbe par rapport à ses asymptotes :

$$1) f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad 2) g(x) = (x^3 + x + 1)^{\frac{1}{3}} - (x^2 - x - 1)^{\frac{1}{2}} \quad 3) h(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

Exercice n°21

Étudier les variations et représenter graphiquement les fonctions données par les formules suivantes :

$$1) f(x) = \exp(x) + \exp\left(\frac{1}{x}\right) \quad 2) g(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\exp(x) - 1}{x}\right) \quad 3) h(x) = \sqrt{x(x+2)} \exp\left(\frac{1}{x}\right) \quad 4) k(x) = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$$

Exercice n°22

Soit \mathcal{C} la courbe d'équation $y = \operatorname{argsh} x - \alpha x - \beta x^2$. Préciser, selon les valeurs de α et β , l'allure de \mathcal{C} au voisinage de 0.

Exercice n°23

$f : x \mapsto \ln(\arctan x)$ n'admet pas de développement limité au voisinage de 0. Trouver un développement limité de $f(x) - \ln x$ à l'ordre 4. En déduire un développement généralisé de $f(x)$.