UNIVERSITÉ DE RENNES 1

# Analyse et Probabilités 3

**Examen de seconde session** (Durée : 2 heures)
juin 2019

Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Les cinq exercices sont entièrement indépendants les uns des autres.
**La qualité de la rédaction sera prise en compte.** Le barème est indicatif.

**Exercice n°1** (*4,5 points*)

**1)** Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \cos x$. En déduire le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto e^{\cos x}$.

**2)** Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.

**3)** Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que la limite pour $x$ tendant vers 0 de $\dfrac{a\sqrt{1+x^2}+e^{\cos x}+b}{x^4}$ soit finie et calculer cette limite.

**Exercice n°2** (*4 points*)

**1)** Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(X^2+1)(X^2+3)}$.

**2)** En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(x)}{3\cos^2 x+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

**Exercice n°3** (*3,5 points*)
Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ell n\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$.

**Exercice n°4** (*2,5 points*)
Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2-n\sqrt{n}}$.

**Exercice n°5** (*5,5 points*)
Une urne contient sept boules blanches et quatre boules rouges indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise une boule de cette urne et on observe sa couleur. Soit $X$ la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

**1)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à l'évènement $[X=n]$. Modéliser l'expérience correspondante et calculer $\mathbb{P}([X=n])$.
En déduire la loi de probabilité de $X$.

**2)** Montrer que $X$ admet une espérance. Calculer cette espérance.

**3)** Pour $n$ et $k$ dans $\mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{P}_{[X>n]}([X=k+n]) = \mathbb{P}([X=k])$.