

Analyse et Probabilités 3

Examen de seconde session (Durée : 3 heures)
 juin 2018

Aucun document n'est autorisé.

Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Les exercices sont indépendants les uns des autres, ils peuvent être faits dans l'ordre que vous voulez.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice n°1

1. Donner les développements limités à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto e^{2x}$ et de $x \mapsto \ln(1+x)$.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \ln(1+e^{2x})$.
3. Déterminer les réels a et b tels que la limite pour x tendant vers 0 de

$$\frac{\ln(1+e^{2x}) + a\sqrt{1-2x} + b}{x^3}$$

soit finie et calculer cette limite.

Exercice n°2

1. Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X^2 - 1}{X + 2}.$$

2. En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(x)}{2 + \sin(x)} dx$.

Exercice n°3

Étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t} \cos(t^2)}{e^t - 1} dt.$$

Exercice n°4

Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{n-2}.$$

Tournez la page \Rightarrow

Exercice n°5

Une usine produit des objets dont un pour cent est défectueux. On teste ces objets en bout de chaîne.

- Si un objet est défectueux, la probabilité que le test le décèle est égale à 0,9.
- Si un objet n'est pas défectueux, la probabilité que le test le trouve défectueux est égale à 0,05.

On teste un objet pris au hasard.

1. Le test donne cet objet comme défectueux, quelle est la probabilité qu'il le soit réellement ?
2. Les évènements « l'objet pris au hasard est défectueux » et « l'objet pris au hasard est donné défectueux par le test » sont-ils indépendants ?

Exercice n°6

Une urne contient vingt boules indiscernables au toucher : huit boules rouges, trois blanches et neuf jaunes. On tire au hasard et simultanément trois de ces boules et on observe leurs couleurs.

1. Décrire l'espace fondamental et le munir d'une probabilité.
2. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
 A : « On obtient au moins une boule blanche ». B : « On obtient une boule de chaque couleur ».
3. (a) Rappeler la définition d'une variable aléatoire sur un espace Ω .
(b) Définir la variable aléatoire X représentant le nombre de boules rouges obtenues.
(c) Donner la loi de X .
(d) Quelle est l'espérance de X ?