UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Corrigé de l'examen du 18 décembre 2019

Questions de cours (*2,5 points*)

1) Une fonction réelle continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur ce segment.

2) Si u et v sont de classe C^1 sur $[a, b]$ alors $\int_a^b u(t)\, v'(t)\, \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b v(t)\, u'(t)\, \mathrm{d}t$.

3) On dit qu'une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé dénombrable $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$, suit la loi de Poisson de paramètre λ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

On sait que, pour tout réel x, $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([X = k])$. On a alors $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{n} \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda}$. On en déduit (en posant $j = k - 1$) $u_n = \lambda e^{-\lambda} \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^j}{j!}$. Il s'ensuit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (donc X a une espérance) et à la limite $\mathbb{E}(X) = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$.

Exercice n°1 (*3,5 points*)

1) On a $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)$, $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ et $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

2) Comme $2\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a $\cos(2\sqrt{x}) + 2\sin x - 1 = 1 - 2x + \frac{16}{24}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) + 2x + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{3}x^2$

D'autre part, $e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$ donc $e^{x^2} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$. Finalement, $\dfrac{\cos(2\sqrt{x}) + 2\sin x - 1}{e^{x^2} - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2}{3}$.

3) $f : x \longmapsto \dfrac{\cos(2\sqrt{x}) + 2\sin x - 1}{e^{x^2} - 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et la question précédente a montré que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{2}{3}$. f est donc prolongeable par continuité sur $[0, +\infty[$ et donc localement intégrable sur cet intervalle. Par une majoration grossière, $x^2\,|f(x)| \leqslant x^2 \dfrac{4}{e^{x^2}} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$ (par croissances comparées) donc $\displaystyle\int^{+\infty} f$ converge absolument (règle de comparaison aux intégrales de Riemann). L'intégrale proposée converge donc.

Exercice n°2 (*4 points*)

1) Le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ assure l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\frac{6X}{(1-X)(1+X)(1+2X)} = \frac{a}{1-X} + \frac{b}{1+X} + \frac{c}{1+2X}$$

- En multipliant par $1 - X$ puis en évaluant en 1 on obtient $\dfrac{6}{2.3} = a$ soit $a = 1$.
- En multipliant par $1 + X$ puis en évaluant en -1 on obtient $\dfrac{-6}{2.(-1)} = b$ soit $b = 3$.
- En multipliant par $1 + 2X$ puis en évaluant en $-\frac{1}{2}$ on obtient $\dfrac{-3}{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}} = c$ soit $c = -4$.

Finalement, $$\frac{6X}{(1-X)(1+X)(1+2X)} = \frac{1}{1-X} + \frac{3}{1+X} - \frac{4}{1+2X}.$$

2) Par linéarité de l'intégrale, on déduit de la question précédente

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\left(-\int \frac{-\,\mathrm{d}x}{1-x} + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x} - 2\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{1+2x}\right)$$

Finalement

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\left(-\ell n\ |1-x| + 3\ell n\ |1+x| - 2\ell n\ |1+2x|\right) = \frac{1}{6}\ell n\ \left(\frac{|1+x|^3}{|1-x|\,(1+2x)^2}\right) + \text{constante}$$

3) a) $g : t \longmapsto \dfrac{\cos(t)}{\sin(t)+\sin(2t)}$ est continue donc intégrable sur le segment $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$.

b) On constate que l'expression $g(t)\,\mathrm{d}t$ est invariante quand on remplace t par $-t$. Les règles de Bioche conduisent alors à effectuer le changement de variable $u = \cos t$.

On a alors $\mathrm{d}u = -\sin t\,\mathrm{d}t$ et donc $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} g = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos t).(-\sin t\,\mathrm{d}t)}{\sin^2 t + 2\sin^2 t.(\cos t)} = \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{-u.\,\mathrm{d}u}{(1-u^2)(1+2u)}$. La question 2) permet alors d'écrire

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} g = \frac{1}{6}\left[\ell n\ \left(\frac{|1+u|^3}{|1-u|\,(1+2u)^2}\right)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}\left[\ell n\ \left(\frac{(\frac{3}{2})^3}{\frac{1}{2}.2^2}\right) - \ell n\, 1\right] = \frac{1}{6}\ell n\ \left(\frac{27}{16}\right)$$

$\boxed{\textbf{Exercice n°3}}$ *(1,5 point)*

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

- La série $\sum u_n$ est alternée (car $(-1)^n u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ a un signe constant).
- $|u_n| = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (car $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0$).
- Enfin, la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. En effet, la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et à valeurs dans $]0,1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$ et $x \mapsto \sin x$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Le critère spécial à certaines séries alternées permet alors de conclure que $\sum u_n$ converge.

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$ *(2 points)*

$g : t \longmapsto \dfrac{\sin t}{2+t}$ est continue donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$.

Soit $X > 0$. $t \mapsto -\cos t$ et $t \mapsto \dfrac{1}{2+t}$ sont de classe C^1 sur $[0, X]$ donc (théorème d'intégration par parties), $\displaystyle\int_0^X g = \left[\frac{-\cos t}{2+t}\right]_0^X - \int_0^X \frac{1}{(2+t)^2}\cos t\,dt$. Or, $\left|\dfrac{\cos t}{(2+t)^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{(2+t)^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann) donc $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{1}{(2+t)^2}\cos t\,dt$ converge (absolument).

D'autre part $\left|\dfrac{-\cos X}{2+X}\right| \leqslant \dfrac{1}{2+X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$ donc finalement $\displaystyle\int_0^X g$ a une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$. Cela prouve que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g$ converge.

$\boxed{\textbf{Exercice n°5}}$ *(3 points)*

1) Un résultat possible peut être vu comme un couple (x_1, x_2) (x_i désignant le numéro obtenu lors du tirage i). On a alors $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \{1, 2, \cdots, 4\}^2\}$ (de cardinal 4^2) et on munit Ω de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ (les boules étant indiscernables au toucher).

2) On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $Y(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
La loi conjointe de X et Y est alors donnée par le tableau des $\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell])$:

$k \backslash \ell$	2	3	4	5	6	7	8	$\mathbb{P}([X = k])$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{9}{16}$
1	0	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{6}{16}$
2	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{1}{16}$
$\mathbb{P}([Y = \ell])$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\sum = 1$

puisque, par exemple $[X = 1] \cap [Y = 5] = \{(2, 3), (3, 2)\}$

La dernière colonne (resp. ligne), obtenue par sommation des trois précédentes, donne alors la loi de X (resp. Y). On a en effet par exemple :

$$\begin{aligned} [X = 1] &= [X = 1] \cap \Omega \\ &= [X = 1] \cap \bigcup_{\ell \in Y(\Omega)} [Y = \ell] \\ &= \bigcup_{\ell=2}^{8} [X = 1] \cap [Y = \ell] \end{aligned}$$

donc (réunion disjointe) $\mathbb{P}([X = 1]) = \sum_{\ell=2}^{8} \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = \ell])$.
Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes puisque par exemple

$$\mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 3]) = 0 \neq \mathbb{P}([X = 2]).\,\mathbb{P}([Y = 3])$$

$\boxed{\textbf{Exercice n°6}}$ *(6,5 points)*

1) • Si $|x| < 1$. On a $n^2.\dfrac{|x|^n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (par croissances comparées) et donc $\sum u_n$ converge absolument (règle de Riemann).

• Si $x = 1$. On sait que $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

• Si $x = -1$. On sait que $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge (série harmonique alternée).

• Si $|x| > 1$. On a $\dfrac{|x|^n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (par croissances comparées) et donc $\sum \dfrac{x^n}{n}$ diverge grossièrement.

Finalement, $\sum \dfrac{x^n}{n}$ converge si et seulement si $x \in [-1, 1[$.

2) f est de classe C^{n+1} sur $]-1, 1[$ et un calcul simple montre que $\forall t \in]-1, 1[$, $f^{(n+1)}(t) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.
En particulier, $\forall t \in [0, \frac{1}{2}]$, $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant n!.2^{n+1}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à f entre 0 et x donne alors :

$$\left| f(x) - f(0) - \frac{(x-0)^1}{1!} f'(0) - \cdots - \frac{(x-0)^n}{n!} f^{(n)}(0) \right| \leqslant n!\, 2^{n+1} \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\text{et donc} \qquad \left| f(x) - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}.2! - \cdots - \frac{x^n}{n!}(n-1)! \right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$ on a donc $\left| -\ell n\,(1-x) - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k} \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k} = -\ell n\,(1-x)$.

3) Par hypothèse, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}([X = k]) = p(1-p)^{k-1}$.

a) On en déduit immédiatement $Y(\Omega) = \{\frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N}^*\}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}([Y = \frac{1}{k}]) = p(1-p)^{k-1}$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right) \mathbb{P}([Y = \frac{1}{k}]) = p \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-p)^{k-1}}{k} = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-p)^k}{k}$. Comme $1 - p \in [0, \frac{1}{2}]$, la question précédente montre que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right) \mathbb{P}([Y = \frac{1}{k}]) = -\frac{p}{1-p} \ell n\,(1 - (1-p))$. Cela prouve que Y a une espérance et que $\mathbb{E}(Y) = -\frac{p \ell n\,(p)}{1-p}$.