UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Examen du 18 décembre 2019

Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
Le barème est donné à titre indicatif.

Les exercices sont indépendants les uns des autres.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Questions de cours (*2,5 points*)

1) Énoncer le théorème de Heine pour les fonctions uniformément continues.

2) Énoncer le théorème d'intégration par parties pour une intégrale sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

3) Soit $\lambda > 0$. Quand dit-on qu'une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé dénombrable $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$, suit la loi de Poisson de paramètre λ ? (Donner la définition.)
Démontrer qu'alors X a une espérance et que l'on a $\mathbb{E}[X] = \lambda$.

Exercice n°1 (*3,5 points*)

1) Donner les développements limités à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \cos x$, de $x \mapsto \sin x$ et de $x \mapsto e^x$.

2) Donner un équipalent simple en 0 de $\cos(2\sqrt{x}) + 2\sin x - 1$ puis de $\dfrac{\cos(2\sqrt{x}) + 2\sin x - 1}{e^{x^2} - 1}$.

3) Étudier la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\sqrt{x}) + 2\sin x - 1}{e^{x^2} - 1}\,\mathrm{d}x$.

Exercice n°2 (*3 points*)

1) Expliciter la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle $\dfrac{6X}{(1-X)(1+X)(1+2X)}$: on trouvera les coefficients a, b et c pour lesquels

$$\frac{6X}{(1-X)(1+X)(1+2X)} = \frac{a}{1-X} + \frac{b}{1+X} + \frac{c}{1+2X}.$$

2) En déduire une primitive sur $[0, 1[$ de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{(1-x^2)(1+2x)}$.

3) Soit $g : t \longmapsto \dfrac{\cos(t)}{\sin(t) + \sin(2t)}$.

a) Expliquer pourquoi g est intégrable sur $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$.

b) Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Tournez la page ⇒

$\boxed{\textbf{Exercice n°3}}$ (*1 point*)

Étudier la convergence de la série $\sum(-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$ (*1,5 point*)

Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{2+t}\, dt$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°5}}$ (*3 points*)

Une urne contient quatre boules (indiscernables au toucher) portant les numéros 1 à 4. On effectue dans cette urne un tirage successif avec remise de deux boules et l'on observe les deux numéros obtenus.

1) Donner un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ modélisant l'expérience.

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de numéros 3 obtenus et Y la variable aléatoire égale à la somme des deux numéros obtenus.

a) Déterminer la loi conjointe de X et Y.

b) En déduire les lois marginales de X et de Y.

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

$\boxed{\textbf{Exercice n°6}}$ *(5 points)*

1) Discuter, suivant la valeur du réel x, la nature de la série $\sum \frac{x^n}{n}$.

2) On considère la fonction $f : x \longmapsto -\ell n\,(1-x)$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Vérifier que f est k fois dérivable sur $]-1,1[$ et calculer $f^{(k)}(x)$ pour tout réel x de $]-1,1[$.

b) Soit $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange appliquée à f, à l'ordre n, entre 0 et x, montrer que :

$$\left| f(x) - \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} \right| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

c) En déduire que : $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ell n\,(1-x)$.

3) Soit X une variable aléatoire réelle, définie sur un espace probabilité dénombrable $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$, suivant la loi géométrique de paramètre p (où $p \in]\frac{1}{2}, 1[$). On pose $Y = \dfrac{1}{X}$.

a) Donner la loi de la variable aléatoire Y.

b) Démontrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.

`Fin de l'examen`