UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Corrigé de l'examen du 17 décembre 2018

Exercice n°1 (*3 points*)

1) On a $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. On en déduit $e^{\cos x} = e^{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+x^4\varepsilon(x)}$ soit $e^{\cos x} = e.e^{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+x^4\varepsilon(x)}$. Comme $e^X = 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + X^2\varepsilon(X)$, on a par composition

$$e^{\cos x} = e\left(1 + (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4)^2\right) + x^4\varepsilon(x) = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

2) Comme $\ell n\,(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \underset{X\to 0}{o}(X^2)$, on a $\ell n\,(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$.

3) On écrit un DL à l'ordre 4 du numérateur : $a\left(x^2 - \frac{1}{2}x^4\right) + e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + b + x^4\varepsilon(x)$ soit encore $e + b + (a - \frac{e}{2})x^2 + (\frac{e}{6} - \frac{a}{2})x^4 + x^4\varepsilon(x)$. La quantité proposée admet donc une limite finie si et seulement si $a = \frac{e}{2}$ et $b = -e$. On a alors

$$\frac{a\ell n\ (1+x^2) + e^{\cos x} + b}{x^4} = \frac{(\frac{e}{6} - \frac{e}{4})x^4 + x^4\varepsilon(x)}{x^4} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{-e}{12}$$

Exercice n°2 (*3 points*)

1) Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\ell n\,(1+n^2)}$. • La série $\sum u_n$ est alternée (car $(-1)^n u_n = \frac{1}{\ell n\,(1+n^2)}$ a un signe constant). • $|u_n| = \frac{1}{\ell n\,(1+n^2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ell n\, x = +\infty$). • Enfin, la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En effet, la suite $(\ell n\,(1+n^2))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante (car $x \mapsto \ell n\, x$ est croissante) et strictement positive et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.
Le critère spécial à certaines séries alternées permet alors de conclure que $\sum u_n$ converge.

2) • Si $b \in]-1, 1[$. On a alors $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = 0$ et donc $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2\sqrt{n}}{n^a} = \dfrac{2}{n^{a-\frac{1}{2}}}$ et par suite $\sum u_n$ converge si et seulement si $a - \frac{1}{2} > 1$ (série de Riemann) c'est à dire $a > \frac{3}{2}$.

• Si $b \in \{-1, 1\}$. On a de même $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2\sqrt{n}}{n^a}$ et $\sum u_n$ converge si et seulement si $a > \frac{3}{2}$.

• Si $|b| > 1$. On a alors $n^2\,|u_n| = \dfrac{2n^{\frac{5}{2}}}{|b|^n}\dfrac{1}{\left|1 + \frac{n^a}{b^n}\right|}$. Or pour tout réel α, $\dfrac{n^\alpha}{|b|^n} = n^\alpha e^{-n\ell n\,|b|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ car $\ell n\ |b| > 0$ (croissance comparée) donc $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\,|u_n| = 0$ et $\sum u_n$ converge absolument (règle de Riemann).

Exercice n°3

1) Le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ assure l'existence de $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\frac{2X+6}{(X-2)^2(X^2+1)} = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{(X-2)^2} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

• En multipliant par $(X-2)^2$ puis en évaluant en 2 on obtient $\dfrac{4+6}{2^2+1} = b$ soit $b = 2$.

• En multipliant par X^2+1 puis en évaluant en i on obtient $\dfrac{2i+6}{(i-2)^2} = ci + d$ et donc $ci + d = \dfrac{(2i+6)(-i-2)^2}{|i-2|^4} = \dfrac{30i+10}{5^2}$. Par suite, $c = \dfrac{6}{5}$ et $d = \dfrac{2}{5}$.

• En multipliant par X puis en faisant tendre X vers $+\infty$ on obtient $0 = a + c$ et donc $a = -\dfrac{6}{5}$.

Finalement, $\dfrac{2X+6}{(X-2)^2(X^2+1)} = \dfrac{-6}{5(X-2)} + \dfrac{2}{(X-2)^2} + \dfrac{6X+2}{5(X^2+1)}$.

2) Par linéarité de l'intégrale, on déduit de la question précédente

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{6}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2} + \frac{3}{5}\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} + \frac{2}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

Finalement

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{6}{5}\ell n\,|x-2| - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{5}\ell n\,(x^2+1) + \frac{2}{5}\arctan x + \text{constante}$$

3) a) $g : t \longmapsto \dfrac{\sin(2t) + 6\cos t}{(\sin t - 2)^2(2 - \cos^2 t)}$ est continue donc intégrable (au sens de Riemann) sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b) On constate que l'expression $g(t)\,\mathrm{d}t$ est invariante quand on remplace t par $\pi - t$. Les règles de Bioche conduisent alors à effectuer le changement de variable $u = \sin t$.
On a alors $\mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t$ et donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin t + 6)\cos t\,\mathrm{d}t}{(\sin t - 2)^2(2 - 1 + \sin^2 t)} = \int_0^1 \frac{(2u+6)\,\mathrm{d}u}{(u-2)^2(1+u^2)}$. La question 2) permet alors d'écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g = \left[\frac{3}{5}\ell n\,\frac{u^2+1}{(u-2)^2} - \frac{2}{u-2} + \frac{2}{5}\arctan u\right]_0^1 = \frac{3}{5}\ell n\,2 + 2 + \frac{2}{5}.\frac{\pi}{4} - \frac{3}{5}\ell n\,(\frac{1}{4}) - 1 = \frac{9}{5}\ell n\,2 + \frac{\pi}{10} + 1$$

Exercice n°4

1) $g : t \mapsto \frac{1}{\ell n\,(1+\sqrt{t})}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Soit alors G une primitive de g sur $]0, +\infty[$. Pour tout x de $]0, +\infty[$, $[x^2, 2x]$ (resp. $[2x, x^2]$) est inclus dans $]0, +\infty[$ donc : $f(x) = G(x^2) - G(2x)$. $x \mapsto x^2$ (resp. $x \mapsto 2x$) est dérivable sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans $]0, +\infty[$ et G est dérivable sur ce dernier intervalle donc (théorème de dérivation des fonctions composées) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0,\ f'(x) = 2x\frac{1}{\ell n\,(1+\sqrt{x^2})} - \frac{2}{\ell n\,(1+\sqrt{2x})}$.

2) Soit $x \in]0, 1[$. On a alors $x^2 < 2x$.
g est continue sur $[x^2, 2x]$ donc (formule de la moyenne) il existe un c_x entre x^2 et $2x$ tel que $\displaystyle\int_{2x}^{x^2} g = (x^2 - 2x)g(c_x)$ c'est à dire $f(x) = \frac{x^2-2x}{\ell n\,(1+\sqrt{c_x})}$. On en déduit $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x-2}{\ell n\,(1+\sqrt{c_x})}$. Or $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} c_x = 0^+$ (théorème des gendarmes) donc $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$: f n'est pas dérivable en 0.

3) Soit $x > 2$. On a alors $2x < x^2$. $\forall t \in [2x, x^2],\ 0 < \ell n\,(1+\sqrt{t}) \leqslant \ell n\,(1+x)$ donc $g(t) \geqslant \dfrac{1}{\ell n\,(1+x)}$.
On en déduit $f(x) \geqslant \dfrac{x^2-2x}{\ell n\,(1+x)}$. Il s'ensuit $\dfrac{f(x)}{x} \geqslant \dfrac{x-2}{\ell n\,(1+x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ (croissances comparées des fonctions puissances et logarithme).

Exercice n°5 *(3,5 points)*

1) $f : t \longmapsto \dfrac{\sin(2\sqrt{t})}{e^t - 1}$ est continue (donc localement intégrable) sur $]0, +\infty[$.

On a $e^t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} t$ et $\sin(2\sqrt{t}) \underset{t\to 0}{\sim} 2\sqrt{t}$ donc $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{2}{\sqrt{t}}$. Or $\displaystyle\int_0 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge (intégrale de Riemann) donc $\displaystyle\int_0 f$ converge.

D'autre part $t^2\,|f(t)| \leqslant \dfrac{t^2}{e^t - 1} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ (par croissances comparées) donc $\displaystyle\int^{+\infty} f$ converge absolument (règle de comparaison aux intégrales de Riemann). L'intégrale proposée converge donc.

2) $g : t \longmapsto \dfrac{\cos t}{1+t}$ est continue donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$.

Soit $X > 0$. $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ sont de classe C^1 sur $[0, X]$ donc (théorème d'intégration par parties), $\displaystyle\int_0^X g = \left[\frac{\sin t}{1+t}\right]_0^X + \int_0^X \frac{1}{(1+t)^2}\sin t\,dt$. Or, $\left|\dfrac{\sin t}{(1+t)^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{(1+t)^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann) donc $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2}\sin t\,dt$ converge (absolument).

D'autre part $\left|\dfrac{\sin X}{1+X}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$ donc finalement $\displaystyle\int_0^X g$ a une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$. Cela prouve que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g$ converge.

Exercice n°6 *(2,5 points)*

1) Afin de pouvoir munir l'univers de la probabilité uniforme, on considère que les deux dés sont distinguables (on les numérote 1 et 2) et on note (x_1, x_2) un résultat possible (x_i désignant le numéro affiché par le dé numéro i). On a alors $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \{1, 2, \cdots, 6\}^2\}$ (de cardinal 6^2) et on munit Ω de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ (les dés étant équilibrés).

2) On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

La loi conjointe de X et Y est alors donnée par le tableau des $\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell])$:

$k\backslash\ell$	1	2	3	4	5	6	$\mathbb{P}([X = k])$
0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{3}{36}$	0	$\frac{5}{36}$	0	$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
1	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{3}{36}$	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
$\mathbb{P}([Y = \ell])$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\sum = 1$

puisque, par exemple $[X = 0] \cap [Y = 5] = \{(1, 5), (5, 1), (3, 5), (5, 3), (5, 5)\}$

La dernière colonne (resp. ligne), obtenue par sommation des trois précédentes, donne alors la loi de X (resp. Y). On a en effet par exemple :

$$\begin{aligned}
[X = 1] &= [X = 1] \cap \Omega \\
&= [X = 1] \cap \bigcup_{\ell \in Y(\Omega)} [Y = \ell] \\
&= \bigcup_{\ell=1}^{6} [X = 1] \cap [Y = \ell]
\end{aligned}$$

donc (réunion disjointe) $\mathbb{P}([X = 1]) = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{6} \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = \ell])$.

Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes puisque par exemple

$$\mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = 3]) = 0 \neq \mathbb{P}([X = 2]).\,\mathbb{P}([Y = 3])$$

Exercice n°7

1) On a $[X=Y]=[X=Y]\cap\Omega=[X=Y]\cap\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[Y=k]$ donc (par distributivité de l'intersection par rapport à la réunion), $[X=Y]=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[X=Y]\cap[Y=k]=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[X=k]\cap[Y=k]$. La réunion étant disjointe, par σ-additivité, $\mathbb{P}([X=Y])=\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}([X=k]\cap[Y=k])$. Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, on a bien finalement $\mathbb{P}([X=Y])=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}([X=k]).\mathbb{P}([Y=k])$.

2) Comme $[Y=0]=\emptyset$, la question précédente donne $\mathbb{P}([X=Y])=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}([X=k])\mathbb{P}([Y=k])=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.p(1-p)^{k-1}$ donc $\mathbb{P}([X=Y])=\frac{p}{1-p}e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^k}{k!}=\frac{p}{1-p}e^{-\lambda}\left(e^{\lambda-\lambda p}-1\right)$. Finalement, $\mathbb{P}([X=Y])=\frac{p}{1-p}\left(e^{-\lambda p}-e^{-\lambda}\right)$.