UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Examen du 17 décembre 2018

Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
Le barème est donné à titre indicatif.

Les exercices sont indépendants les uns des autres.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice n°1 (*3 points*)

1) Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \cos x$. En déduire le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto e^{\cos x}$.

2) Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \ell n\ (1+x^2)$.

3) Déterminer les réels a et b tels que la limite pour x tendant vers 0 de $\dfrac{a\ell n\ (1+x^2)+e^{\cos x}+b}{x^4}$ soit finie et calculer cette limite.

Exercice n°2 (*3 points*)

Étudier la convergence de chacune des séries suivantes :

1) $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ell n\,(1+n^2)}$.

2) $\sum \dfrac{2\sqrt{n}}{n^a+b^n}$ où $a \in]0,+\infty[$ et $b \in \mathbb{R}$. (On discutera suivant les valeurs de a et b.)

Exercice n°3 (*4 points*)

1) Expliciter la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle

$$\frac{2X+6}{(X-2)^2(X^2+1)}.$$

2) En déduire une primitive sur $[0,1]$ de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x+6}{(x-2)^2(x^2+1)}$.

3) Soit $g : t \longmapsto \dfrac{\sin(2t)+6\cos t}{(\sin t-2)^2(2-\cos^2 t)}$.

a) Expliquer pourquoi g est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Tournez la page ⇒

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$ (*3 points*)

Soit f la fonction donnée sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x=0 \\ \displaystyle\int_{2x}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ell n\,(1+\sqrt{t})} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

1) Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x>0$.

2) Montrer que f n'est pas dérivable en 0. *On pourra utiliser la formule de la moyenne.*

3) Montrer que pour $x>2$, $f(x)\geqslant \dfrac{x^2-2x}{\ell n\,(1+x)}$. Que peut-on dire de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$?

$\boxed{\textbf{Exercice n°5}}$ (*3 points*)

Étudier la convergence de chacune des intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\sqrt{t})}{e^t-1}\,dt$ **2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t}\,dt$

$\boxed{\textbf{Exercice n°6}}$ (*3 points*)

On lance deux dés à six faces parfaitement équilibrés et l'on observe les deux chiffres obtenus.

1) Donner un espace de probabilité $(\Omega,\mathbb{P})$ modélisant l'expérience.

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de chiffres pairs obtenus et Y la variable aléatoire égale au maximum des chiffres obtenus. Déterminer la loi conjointe de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

$\boxed{\textbf{Exercice n°7}}$ *(2 points)*

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{T},\mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1) Montrer que $\mathbb{P}([X=Y])=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}([X=k]).\mathbb{P}([Y=k])$.

2) En déduire que si X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$ et Y la loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$ alors $\mathbb{P}([X=Y])=\dfrac{p}{1-p}(e^{-\lambda p}-e^{-\lambda})$.

`Fin de l'examen`