UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Corrigé de l'examen

Exercice n°1

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$.

1. F une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est une primitive de f si F est dérivable de dérivée f.
2. $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Comme F est dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut applique le théorème de Rolle sur $[a, b]$. On sait que F est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Comme $F(a) = F(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $F'(c) = 0$, i.e. $f(c) = 0$. Donc f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[a, b]$.
4. On pose $u(t) = t$ et $v(t) = f(t)$. La fonction u est dérivable et v est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème d'intégration par parties, on a

$$\int_a^x tf(t)\,\mathrm{d}t = [tF(t)]_a^x - \int_a^x F(t)\,\mathrm{d}t = xF(x) - aF(a) - \int_a^x F(t)\,\mathrm{d}t.$$

5. On utilise le changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$, $u = \exp(-t)$. On a $\mathrm{d}u = -u\,\mathrm{d}t$ et donc

$$\int_a^x e^{-t} f\Big(e^{-t}\Big)\,\mathrm{d}t = -\int_{e^{-a}}^{e^{-x}} f(u)\mathrm{d}u = F(e^{-a}) - F(e^{-x}).$$

Exercice n°2

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$.

1. On a $0 \leqslant f(n) \leqslant \frac{1}{n^3}$ et la somme de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$ converge car $3 > 1$. Par comparaison, on en déduit que $\sum f(n)$ converge.
2. On décompose la fraction en éléments simples. On a

$$f(x) = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2+2x+5}.$$

En regardant ce qui se passe en -2, en prenant la limite de $xf(x)$ en $+\infty$ et en prenant la valeur 0, on en déduit que

$$a = \frac{1}{5}, \quad b = -a = \frac{-1}{5}, \quad c = 0.$$

On a donc

$$f(x) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{x}{x^2+2x+5}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+5} + \frac{1}{(x+1)^2+4}\right).$$

Par conséquent, une primitive de f est

$$F(x) = \frac{1}{5}\ln(x+2) - \frac{1}{10}\ln\Big(x^2+2x+5\Big) + \frac{1}{10}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

3. La fonction $x \mapsto f(x)$ est positive décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme la série $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, on en déduit par le théorème de comparaison série-intégrale que

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Par ailleurs

$$F(x) = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{(x+2)^2}{x^2+2x+5}\right) + \frac{1}{10}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

converge vers $\frac{\pi}{20}$ quand $x \to +\infty$. D'où

$$R_n \leqslant \frac{\pi}{20} - \frac{1}{10}\ln\left(\frac{(n+2)^2}{n^2+2n+5}\right) + \frac{1}{10}\mathrm{Arctan}\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{10}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{n+1}\right) - \frac{1}{10}\ln\left(\frac{(n+2)^2}{n^2+2n+5}\right).$$

Exercice n°3

On pose $f(t) = \frac{\sin(t)\mathrm{e}^{-t}}{t^2\sqrt{t-2}}$. La fonction est continue sur $]2,+\infty[$, donc localement intégrable sur $]2,+\infty[$.
On a $|f(t)| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2\sqrt{t-2}}$ et

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2\sqrt{t-2}} \underset{t\to 2}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-2}}{4}\frac{1}{\sqrt{t-2}}$$

qui est intégrable au voisinage de 2 car $1/2 < 1$ (intégrale de Riemann).
Par ailleurs, pour $t \geqslant 3$, on a

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2\sqrt{t-2}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{9}$$

qui est intégrable en $+\infty$.
En conclusion, par comparaison, l'intégrale,

$$\int_2^{\infty} \frac{\sin(t)\mathrm{e}^{-t}}{t^2\sqrt{t-2}}\,\mathrm{d}t$$

converge.

Exercice n°4

On pose $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+n}}$. Il s'agit d'une suite alternée avec $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n+n}}$ qui décroit vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+n}}$ converge.

Exercice n°5

On souhaite étudier la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x}\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}}{3x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. $\exp(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$
   $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.
2. On a

$$\exp(2x) \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + 4\frac{x^2}{2} + 8\frac{x^3}{6} + 16\frac{x^4}{24} + o(x^4)$$
$$-\exp(-x) \underset{x\to 0}{=} -1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

et donc
$$\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-x} \underset{x\to 0}{=} 3x + \frac{3}{2}x^2 + 3\frac{x^3}{2} + 15\frac{x^4}{24} + o(x^4)$$
D'où
$$\frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-x}}{3x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{2} + 5\frac{x^3}{24} + o(x^3)$$
On pose $u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{24}$, on a
$$u^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \quad u^3 = \frac{x^3}{8} + o(x^3)$$
Par conséquent,
$$\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-x}}{3x}\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} + x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) + x^3\left(\frac{5}{24} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24}\right) + o(x^3) = \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^3).$$
On a donc
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{3}{4}x + o(x^2).$$

3. Comme f admet un DL à l'ordre 2 en 0, elle est dérivable de dérivée $f'(0) = 0$.
4. $y = 1 + \frac{3}{4}x$ est tangente à la courbe en 0, mais le DL à l'ordre 2 ne suffit pas pour avoir la position de la courbe par rapport à la tangente. Il faudrait calculer le terme d'ordre supérieur.

Exercice n°6

On note H l'événement "être un homme", F l'événement "être une femme" et D l'événement être daltonien.

1. On a $\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(F) = \frac{1}{2}$, car il y a autant d' hommes que de femmes et qu'on choisit la personne au hasard. D'après la formule de Bayes, on a,
$$\mathbb{P}_D(H) = \frac{\mathbb{P}_H(D)\mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}_H(D)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}_F(D)\mathbb{P}(F)} = \frac{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\frac{1}{2}} = \frac{5}{9}.$$
2. On a $\mathbb{P}(H) = 2\mathbb{P}(F) = \frac{2}{3}$, car il y a deux fois plus d'hommes que de femmes dans la population. D'après la formule de Bayes, on a,
$$\mathbb{P}_D(H) = \frac{\mathbb{P}_H(D)\mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}_H(D)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}_F(D)\mathbb{P}(F)} = \frac{\frac{1}{4}\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\frac{1}{3}} = \frac{5}{7}.$$

Exercice n°7

On lance deux dés équilibrés et on regarde le résultat.

1. On peut supposer les dés distincts. Les dés étant équilibrés, on se place sur l'espace fondamental $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$ munit de la probabilité uniforme : $\mathbb{P}((i, j)) = 1/36$ pour tout $(i, j) \in \Omega$.
2. On a $\mathbb{P}$(au moins un des dés donne 6) $= 1 - \mathbb{P}$(les deux dés ne donnent pas 6). Il y a 25 possibilités de ne pas avoir de 6. Comme on est dans une situation d'équiprobabilité, donc
$$\mathbb{P}(\text{au moins un des dés donne 6}) = 1 - \mathbb{P}(\text{les deux dés ne donnent pas 6}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$
Autre méthode :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{au moins un des dés donne 6}) &= 1 - \mathbb{P}(\text{les deux dés ne donnent pas 6}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\text{le premier dé ne donne pas 6}) \times \mathbb{P}(\text{le second dé ne donne pas 6})\end{aligned}$$
par indépendance entre les dés. Donc $\mathbb{P}$(au moins un des dés donne 6) $= 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

3. (a) Une variable aléatoire est une fonction de Ω à valeurs réelles.
   (b) $X : \Omega \to \mathbb{R}$ avec $(i, j) \mapsto \min(i, j)$.
   (c) X est à valeurs dans $1, \ldots 6$. On a

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = k)$	$11/36$	$9/36$	$7/36$	$5/36$	$3/36$	$1/36$

   (d) $\mathbb{E}[X] = 11/36 + 18/36 + 21/36 + 20/36 + 15/36 + 6/36 = 91/36 \simeq 2,53$.