

Analyse et Probabilités 3

Examen (Durée : 3 heures)

21 décembre 2017

Aucun document n'est autorisé.

Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Les exercices sont indépendants les uns des autres, ils peuvent être faits dans l'ordre que vous voulez.

La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice n°1

Soit f une fonction définie et continue sur \mathbb{R} .

1. Qu'appelle-t-on primitive de f sur \mathbb{R} ?
2. Soit a un réel. Soit F une primitive de f . Exprimer $F(x)$ à l'aide de $F(a)$ et $\int_a^x f(t) dt$.
3. On suppose qu'il existe $b > a$ tel que $F(b) = F(a)$. Vérifier que f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[a, b]$.
4. En utilisant une intégration par parties, exprimer $\int_a^x t f(t) dt$ à l'aide de F .
5. Exprimer $\int_a^x e^{-t} f(e^{-t}) dt$ à l'aide de F .

Exercice n°2

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$.

1. Montrer la convergence de la série $\sum f(n)$.
2. Calculer une primitive de f .
3. En justifiant votre raisonnement, en déduire une majoration du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$.

Exercice n°3

Étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_2^{\infty} \frac{\sin(t)e^{-t}}{t^2\sqrt{t-2}} dt.$$

Exercice n°4

Étudier la convergence de la série

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+n}}.$$

Tournez la page \Rightarrow

Exercice n°5

On souhaite étudier la fonction f définie pour $x > 0$ par

$$f(x) = \frac{2}{x} \ln \left(\frac{e^{2x} - e^{-x}}{3x} \right),$$

et pour $x = 0$, on pose $f(0) = 1$.

1. Rappeler le développement limité de $x \mapsto \sin x$ au voisinage de 0 à l'ordre n .
2. Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
3. En déduire que f est dérivable en 0.
4. Donner une équation de la tangente en 0 et la position de la courbe par rapport à celle-ci.

Exercice n°6

On admet que un quart des hommes et un cinquième des femmes d'une population sont daltoniens. On sélectionne une personne daltonienne au hasard.

1. On admet que les hommes sont aussi nombreux que les femmes dans la population. Quelle est la probabilité que la personne sélectionnée soit un homme ?
2. On suppose maintenant qu'il y a deux fois plus d'hommes que de femmes dans la population. Que vaut maintenant la probabilité que la personne sélectionnée soit un homme ?

Exercice n°7

On lance deux dés équilibrés et on regarde le résultat.

1. Décrire l'espace fondamental et le munir d'une probabilité.
2. Calculer la probabilité qu'un moins un des dés donne un 6.
3. (a) Rappeler la définition d'une variable aléatoire sur un espace Ω .
(b) Définir une variable aléatoire X représentant le plus petit chiffre obtenu.
(c) Donner la loi de X .
(d) Quelle est la valeur moyenne de X ?