Chapitre 4

Intégrales généralisées

4.1 Généralités

4.1.1 Introduction

L'intégrale a été définie notamment pour des fonctions continues par morceaux sur un segment. On souhaite étendre cette notion à des fonctions définies sur un intervalle quelconque.

On considère une fonction f de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) où b désigne un réel ou $+\infty$. f est dite ***localement intégrable*** sur $[a, b[$ si f est intégrable sur tout compact $[a, x]$ de $[a, b[$. C'est en particulier le cas lorsque f est continue par morceaux sur $[a, b[$. **Dans toute la suite, on considérera f localement intégrable sur $[a, b[$.**

Remarques.

— On pourrait procéder à la même étude avec f localement intégrable sur $]a, b]$.

— On pourrait aussi le faire avec $]a, b[$ en divisant l'étude en deux : d'abord sur $]a, c]$ puis sur $[c, b[$ avec $c \in]a, b[$.

4.1.2 Définition

Définition 4.1. *Soit $f \in C_m([a, b[, \mathbb{R})$. On dit que **l'intégrale** de f sur $[a, b[$ **converge** si la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers b (à gauche).*

Si tel est le cas, on note indifféremment $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_a^b f$ ou $\int_{[a,b[}$ cette limite.

*Dans le cas contraire on dit que **l'intégrale** $\int_a^b f(t)dt$ **diverge**.*

Exemple. $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue donc localement intégrable sur $]0, 1]$. Pour tout réel $x \in]0, 1]$ on a $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x}$ donc $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[x \to 0+]{} 2$.

Par suite, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge et on a $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2$.

Exercice 4.1. Montrer de même que $\int_0^1 \ell n\,(t)\,\mathrm{d}t$ converge et donner la valeur de cette intégrale.

Remarque. Si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, elle est localement intégrable sur $[a, b[$ et on a : $\forall x \in [a, b[$, $\left| \int_a^x f - \int_a^b f \right| = \left| \int_b^x f \right| \leqslant M\,|b - x|$ où M est un majorant de $|f|$ sur $[a, b]$.

Donc $\lim_{x\to b}\int_a^x f$ existe et vaut $\int_a^b f$. Autrement dit, l'intégrale de Riemann de f coïncide avec son intégrale généralisée.

Remarque. On s'autorise souvent à écrire $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ avant d'avoir prouver l'existence de la limite. On parle alors de la nature de cette intégrale. Il y a en fait deux problèmes distincts : l'existence de la limite et sa détermination éventuelle.

Influence de la borne inférieure.
Soit α dans $[a,b[$. La relation de Chasles donne $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et donc $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. La borne inférieure n'a donc pas d'influence sur la nature de l'intégrale (on peut choisir a très près de b). On parle de la nature de $\int^b f(t)\,dt$. Cette nature est donc déterminée par les propriétés de f au voisinage de b.

4.1.3 Propriétés des intégrales généralisées.

Toutes ces propriétés se démontrent en utilisant les propriétés analogues des intégrales définies et en passant à la limite. En voici quelques exemples :

- Linéarité : Si les intégrales de f et g sur $[a,b[$ convergent, alors pour tous réels λ,μ l'intégrale de $\lambda f+\mu g$ sur $[a,b[$ converge et $\int_a^b[\lambda f(t)+\mu g(t)]dt = \lambda\int_a^b f(t)dt + \mu\int_a^b g(t)dt$.
- Positivité : Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b[$ et si $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.
- Comparaison : Si $f \leqslant g$ sur $[a,b[$ et si les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.
- Relation de Chasles : Si $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors $\int_c^b f(t)dt$ converge pour tout $c\in[a,b[$ et $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.
- Intégration par parties : Si u et v sont de classe C^1 sur $[a,b[$, le théorème d'intégration par parties montre que l'on a $\int_a^x u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^x - \int_a^x v(t)\,u'(t)\,\mathrm{d}t$.
  Si les trois limites existent, on aura par passage à la limite :
  $$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^b v(t)\,u'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4.2. Démontrer ces propriétés.
Remarque. Si $\int_a^b f(t)\,dt$ converge alors $\lim_{x\to b}\int_x^b f(t)\,dt = 0$.

Soit en effet $x\in[a,b[$ alors $\int_a^x f(t)\,dt$ converge. Or la relation de Chasles impose $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt$ d'où le résultat en passant à la limite.

4.1.4 Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition 4.2. *Si $f\in C_m([a,b[,\mathbb{C})$, on dit que l'intégrale de f sur [a,b[converge si l'intégrale de sa partie réelle $Re(f)$ sur [a,b[et l'intégrale de sa partie imaginaire $Im(f)$ sur [a,b[convergent. Sinon, on dit que l'intégrale diverge. En cas de convergence, on pose*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b Re(f)(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b Im(f)(t)\,\mathrm{d}t.$$

4.2 Cas des fonctions réelles positives

Dans tout le paragraphe, on supposera f localement intégrable sur $[a,b[$, à valeurs réelles, et positive au voisinage de b : $\exists\alpha\in[a,b[,\ \forall x\in[\alpha,b[,\ f(x)\geqslant 0$.

4.2.1 Conséquence principale.

Proposition 4.3. *Soit $f\in C_m([a,b[,\mathbb{R})$ positive. Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $x\in[a,b[\longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.*

Démonstration : On introduit $I_f(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x\in[a,b[$. Comme f est positive, la fonction I_f est croissante, en effet $I_f(y)-I_f(x)=\int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0$ pour $y\geqslant x$. Par conséquent, $I_f(x)$ admet une limite finie quand x tend vers b si et seulement si I_f est majorée. □

Remarque. Si f est positive et si $\displaystyle\int^b f$ diverge alors $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=+\infty$.

Nous allons maintenant énoncer des règles de comparaison bien utiles.

Théorème 4.4 (Théorème de comparaison)**.** *Soient f et g continues par morceaux sur $[a,b[$, à valeurs réelles, et positives sur $[a,b[$.*

— *Si $\forall x\in[a,b[,\ f(x)\geqslant g(x)\geqslant 0$ et si $\displaystyle\int^b g(t)\ \mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int^b f(t)\ \mathrm{d}t$ diverge.*

— *Si $\forall x\in[a,b[,\ 0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ et si $\displaystyle\int^b g(t)\ \mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.*

Démonstration : Si $\displaystyle\int^b g(t)\,dt$ diverge alors I_g n'est pas majorée au voisinage de b. Or on a $I_f(x)\geqslant I_g(x)$ donc I_f n'est pas majorée non plus et $\displaystyle\int^b f(t)\,dt$ diverge. De même pour la convergence. □

Théorème 4.5 (Théorème d'équivalence)**.** *Si f et g sont continues par morceaux sur $[a,b[$, si f a un signe constant au voisinage de b et si $f(x)\underset{x\to b}{\sim}g(x)$ alors $\displaystyle\int^b g(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int^b f(t)\ \mathrm{d}t$ sont de même nature.*

Démonstration : Supposons par exemple f positive au voisinage de b (sinon on considérerait $-f$). Par hypothèse $f(x)=g(x)(1+\varepsilon(x))$ avec $\displaystyle\lim_{x\to b}\varepsilon(x)=0$ et donc en particulier $-\frac12<\varepsilon(x)<\frac12$ pour x suffisamment proche de b. Sur ce voisinage, g est aussi positive et on déduit donc : $\frac12 g(x)<f(x)<\frac32 g(x)$. Le théorème de comparaison permet alors de conclure. □

Théorème 4.6 (Domination)**.** *Soit $g\in C_m([a,b[,\mathbb{R})$ une fonction positive.*

Soit $f\in C_m([a,b[,\mathbb{R})$une fonction positive telle que $f(x)=\underset{x\to b}{O}(g(x))$ (ou $f(x)=\underset{x\to b}{o}(g(x))$).

Si l'intégrale de g sur $[a,b[$ converge alors il en est de même de celle de f.

Démonstration : • Supposons tout d'abord $b\in\mathbb{R}$.

Comme $f(x)=\underset{x\to b}{O}(g(x))$, on peut considérer un réel $\delta>0$ et un réel $M>0$ tels que pour tout $x\in]b-\delta,b[$, $|f(x)|\leqslant Mg(x)$. On a alors $\forall x\in]b-\delta,b[,\ 0\leqslant f(x)\leqslant Mg(x)$.

Comme $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, $\int_{b-\delta}^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et donc (théorème de comparaison) l'intégrale de f sur $[b-\delta, b[$ est convergente. Par suite, $\int_a^b f$ converge.

• Si $b = +\infty$, on procède de même en remarquant qu'il existe $A > 0$ et $M > 0$ tels que pour tout $x > A$, $0 \leqslant f(x) \leqslant Mg(x)$. □

4.2.2 Étude de la convergence lorsque $b = +\infty$.

Fonctions témoins : intégrales de Riemann

$$\boxed{\text{L'intégrale de Riemann } \int^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$$

En effet, $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Si $\alpha = 1$, $F : t \mapsto \ell n\, t$ est une primitive de f et si $\alpha \neq 1$, $F : t \mapsto \frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1}$ est une primitive de f. On remarque bien que F admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Règle de la partie principale.

Soit f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{x^\alpha}$ où A est une constante réelle non nulle. Alors $\int^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Règle de Riemann.

Soit f continue par morceaux et positive sur $[a, +\infty[$.

- Si on peut trouver $\alpha > 1$ tel que $x^\alpha f(x)$ soit majoré (ou ait une limite finie) au voisinage de $+\infty$ alors l'intégrale $\int^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.
- Si on peut trouver $\alpha \leqslant 1$ tel que $x^\alpha f(x)$ soit minoré par un nombre non nul (ou ait une limite non nulle) au voisinage de $+\infty$ alors l'intégrale $\int^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est divergente.

Exercice 4.3. Démontrer ces deux résultats.

Remarques.

— Les règles précédentes s'appliquent encore pour la borne $-\infty$. Pour la règle de Riemann, on étudiera $|x|^\alpha f(x)$.

— Si $\int^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge et si f a une limite finie en $+\infty$ alors cette limite est nulle (en effet, si f admet une limite $\ell \neq 0$ en $+\infty$, on a a fortiori $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ell$). On peut même montrer que la seule limite possible pour f en $+\infty$ est 0 (voir TD).

Exemple. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ell n\, x}{2+x^2}\,\mathrm{d}x$.

$f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}\ell n\, x}{2+x^2}$ est continue par morceaux (donc localement intégrable) sur $[0, +\infty[$. En effet, f a une limite finie en 0 puisque $\sqrt{x}\ell n\, x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.

Pour tout $x > 0$, $x^{\frac{5}{4}} f(x) = \dfrac{1}{\frac{2}{x^2}+1}\dfrac{\ell n\, x}{x^{\frac{1}{4}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (par croissance comparée des fonctions logarithmes et puissances). La règle de Riemann permet donc d'affirmer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ell n\, x}{2+x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

4.2.3 Étude de la convergence lorsque b est fini

Fonctions témoins : intégrales de Riemann

$$\boxed{\text{L'intégrale de Riemann } \int_0 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1.}$$

Avec les notations précédentes, on remarque bien que F admet une limite finie en 0 si et seulement si $\alpha < 1$. Ce même raisonnement montre que

$$\boxed{\text{L'intégrale de Riemann } \int^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1.}$$

Règle de la partie principale.

Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$ telle que $f(x) \underset{x \to b}{\sim} \dfrac{A}{(b-x)^\alpha}$ où A est une constante réelle non nulle. Alors $\displaystyle\int^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Règle de Riemann.

Soit f continue par morceaux et positive sur $[a, b[$.

- Si on peut trouver $\alpha < 1$ tel que $(b-x)^\alpha f(x)$ soit majoré (ou ait une limite finie) alors l'intégrale $\displaystyle\int^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.
- Si on peut trouver $\alpha \geqslant 1$ tel que $(b-x)^\alpha f(x)$ soit minoré par un nombre non nul (ou ait une limite non nulle) alors l'intégrale $\displaystyle\int^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est divergente.

4.3 Intégrale d'une fonction quelconque. Convergence absolue

On considère toujours un intervalle de la forme $I = [a, b[$ avec $a < b$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Définition 4.7. *Soit $f \in C_m([a, b[, \mathbb{R})$ (ou $f \in C_m([a, b[, \mathbb{C})$). On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ **converge absolument** si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.*

Théorème 4.8. *Soit $f \in C_m([a, b[, \mathbb{R})$ (ou $f \in C_m([a, b[, \mathbb{C})$) dont l'intégrale sur [a, b[converge absolument. Alors l'intégrale de f sur $[a, b[$ converge et*

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Démonstration : On va le montrer pour une fonction a priori à valeurs complexes.

Comme $|\mathrm{Re}\, f| \leqslant |f|$ et $|\mathrm{Im}\, f| \leqslant |f|$, par linéarité, il suffit de le montrer pour les fonctions à valeurs réelles. Pour f à valeurs réelles, on note $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$. Ce sont deux fonctions positives, $0 \leqslant f_+ \leqslant |f|$ et $0 \leqslant f_- \leqslant |f|$, dont l'intégrale converge par majoration. Et comme $f = f_+ - f_-$, on déduit (par linéarité) que l'intégrale de f converge sur $[a, b[$.
Enfin, $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b f_+ - \int_a^b f_-$ donc $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b f_+\right| + \left|\int_a^b f_-\right| = \int_a^b f_+ + \int_a^b f_-$ (intégrales de fonctions positives) soit finalement $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b (f_+ + f_-) = \int_a^b |f|$. $\square$

Remarque. On dit parfois que f est ***intégrable*** sur l'intervalle I pour signifier que l'intégrale de f sur I converge absolument.

Exemple. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\cos x}{3+x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.
$f : x \longmapsto \dfrac{2\cos x}{3+x\sqrt{x}}$ est continue (donc localement intégrable) sur $[0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$, $|f(x)| \leqslant \dfrac{2}{x\sqrt{x}}$. Comme $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{3}{2}}}$ converge (intégrale de Riemann avec $\dfrac{3}{2}>1$), le théorème de comparaison permet d'affirmer que $\displaystyle\int^{+\infty} f$ converge absolument. L'intégrale proposée converge donc.

Exemple. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.
$f : x \longmapsto \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ est continue (donc localement intégrable) sur $]0,+\infty[$.
• On a $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\displaystyle\int_0 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge (intégrale de Riemann avec $\dfrac{1}{2}<1$) donc $\displaystyle\int_0 f$ converge.
• D'autre part, pour tout $x \geqslant 1$, $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Le théorème de comparaison ne permet pas ici de conclure, la puissance au dénominateur n'étant pas suffisante pour obtenir une intégrale de Riemann convergente. L'idée est alors d'augmenter cette puissance par une intégration par parties. Soit $A>1$. $u : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $v : x \mapsto \sin x$ sont de classe C^1 sur $[1,A]$ donc (théorème d'intégration par parties)

$$\int_1^A f = \left[\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right]_1^A + \frac{1}{2}\int_1^A \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sin A}{\sqrt{A}} - \sin 1 + \frac{1}{2}\int_1^A \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$$

D'une part, $\dfrac{\sin A}{\sqrt{A}} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$. D'autre part $\forall x>1$, $\left|\dfrac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ et $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{3}{2}}}$ converge (intégrale de Riemann avec $\dfrac{3}{2}>1$) donc $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$ converge (absolument) et en particulier $\displaystyle\int_1^A \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$ a une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$. On en déduit donc que $\displaystyle\int_1^A f$ a une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$: l'intégrale $\displaystyle\int^{+\infty} f$ converge.
En conclusion, l'intégrale proposée converge.

Définition 4.9. *Soit $f \in C_m([a,b[,\mathbb{R})$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est* ***semi-convergente*** *sur $[a,b[$ quand elle converge sans être absolument convergente.*

Exemple. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi convergente. (Voir Td.)

4.4 Intégration des relations de comparaison

Théorème 4.10. *Soit $g \in C_m([a,b[,\mathbb{R})$ positive et $f \in C_m([a,b[,\mathbb{R})$ telles que $f(x) = \underset{x\to b}{O}(g(x))$ (respectivement $f(x) = \underset{x\to b}{o}(g(x))$), alors deux cas se présentent,*

- *si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge, on a $\displaystyle\int_x^b f(t)dt = \underset{x\to b}{O}\left(\int_x^b g(t)dt\right)$ (resp. $\displaystyle\int_x^b f(t)dt = \underset{x\to b}{o}\left(\int_x^b g(t)dt\right)$),*

- *si* $\int_a^b g(t)dt$ *diverge, on a* $\int_a^x f(t)dt = \underset{x\to b}{O}\left(\int_a^x g(t)dt\right)$ *(resp.* $\int_a^x f(t)dt = \underset{x\to b}{o}\left(\int_a^x g(t)dt\right)$*).*

Démonstration : • Supposons que b est fini et que $\int_a^b g(t)dt$ converge.
En supposant $f(x) = \underset{x\to b}{O}(g(x))$, on peut considérer des réels $\delta > 0$ et $M > 0$ tels que, pour tout $x \in]b-\delta, b[$, $|f(x)| \leqslant Mg(x)$. Alors d'une part $\int^b f$ converge absolument et d'autre part

$$\left|\int_x^b f(t)dt\right| \leqslant \int_x^b |f(t)|\,dt \leqslant M\int_x^b g(t)dt.$$

On a donc bien $\int_x^b f(t)dt = \underset{x\to b}{O}\left(\int_x^b g(t)dt\right)$

Si on suppose, $f(x) = \underset{x\to b}{o}(g(x))$, la démonstration est identique car pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]b-\delta, b[$, $|f(x)| \leqslant \varepsilon g(x)$.

• Supposons que b est fini et $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Comme g est une fonction positive, on a alors $\lim_{x\to b}\int_a^x g(t)dt = +\infty$.
Supposons par exemple $f(x) = \underset{x\to b}{o}(g(x))$. Soit $\varepsilon > 0$. On peut alors considérer un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [b-\delta, b[$, $|f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}g(x)$.

Par conséquent, pour tout $x \in [b-\delta, b[$,

$$\left|\int_a^x f(t)dt\right| \leqslant \int_a^x |f(t)|\,dt = \int_a^{b-\delta} |f(t)|\,dt + \int_{b-\delta}^x |f(t)|\,dt \leqslant \int_a^{b-\delta} |f(t)|\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_{b-\delta}^x g(t)dt$$

Comme $\int_{b-\delta}^x g(t)dt \leqslant \int_a^x g(t)dt$ (g est positive),

$$\left|\int_a^x f(t)dt\right| \leqslant \int_a^{b-\delta} |f(t)|\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g(t)dt = \int_a^x g(t)dt\left(\frac{\int_a^{b-\delta}|f(t)|\,dt}{\int_a^x g(t)dt} + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Comme $\lim_{x\to b}\int_a^x g(t)dt = +\infty$, $\frac{\int_a^{b-\delta}|f(t)|\,dt}{\int_a^x g(t)dt} \xrightarrow[x\to b]{} 0$ et on peut considérer un réel $\beta > 0$ tel que pour $x \in [b-\beta, b[$, $\frac{\int_a^{b-\delta}|f(t)|\,dt}{\int_a^x g(t)dt} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On introduit enfin $\alpha = \min(\delta, \beta)$. On a alors, pour $x \in [b-\alpha, b[$, $\left|\int_a^x f(t)dt\right| \leqslant \varepsilon\int_a^x g(t)dt$ ce qui signife bien que $\int_a^x f(t)dt = \underset{x\to b}{o}\left(\int_a^x g(t)dt\right)$.
□

Théorème 4.11 (Intégration des équivalents)**.** *Soient f et g continue par morceaux et positives sur $[a, b[$ (b fini ou non). On suppose que $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$.*

— *Si* $\int^b f(t)\ \mathrm{dt}$ *converge alors* $\int_x^b f(t)\ \mathrm{dt} \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g(t)\ \mathrm{dt}$ *(relation entre infiniments petits)*

— *Si* $\int^b f(t)\ \mathrm{dt}$ *diverge alors* $\int_a^x f(t)\ \mathrm{dt} \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)\ \mathrm{dt}$ *(relation entre infiniments grands)*

Démonstration : On a $f(x) = g(x)\varphi(x)$ avec $\varphi(x)$ tendant vers 1 quand x tend vers b, c'est à dire $f(x) - g(x) = g(x)(\varphi(x) - 1)$ et donc $f(x) - g(x) = \underset{x\to b}{o}(g(x))$.

— Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors il en est de même de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et aussi de $\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$ et de $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$. La proposition précédente donne alors $\int_x^b (f-g) = \underset{x\to b}{o}(\int_x^b g)$ soit $\int_x^b f - \int_x^b g = \underset{x\to b}{o}(\int_x^b g)$ ou encore $\int_x^b f \underset{x\to b}{\sim} (\int_x^b g)$.

— Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge on a de même $\int_a^x (f-g) = \underset{x\to b}{o}(\int_a^x g)$ et donc $\int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} (\int_a^x g)$ □

Exemples.

- Soit $g : t \longmapsto \frac{e^{t^2}}{2t}$. On a $g'(t) = \frac{4t^2e^{t^2} - 2e^{t^2}}{4t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{t^2}$. Comme $\int^{+\infty} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ diverge, on en déduit $\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^x g'(t)\,\mathrm{d}t$ et donc $\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{x^2}}{2x}$.
- Soit $g : t \longmapsto -\frac{e^{-t^2}}{2t}$. On a $g'(t) = \frac{4t^2e^{-t^2} + 2e^{-t^2}}{4t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t^2}$. Comme $\int^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, on en déduit $\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} g'(t)\,\mathrm{d}t$ et donc $\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$.

4.5 Liaison entre notions de suite, de série et d'intégrale

On rappelle tout d'abord un résultat classique lorsque la fonction est positive décroissante :

Proposition 4.12. *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive décroissante. L'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ converge si et seulement si la série $\sum f(n)$ converge.*

Démonstration : Pour clarifier les choses, supposons par exemple que $a = 1$ (le lecteur adaptera la démonstration pour le cas général). Par décroissance de f,

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n).$$

Soit $N \geqslant 2$ un entier. Par sommation de ces inégalités, pour n allant de 1 à $N-1$, il vient

$$0 \leqslant f(2) + \cdots f(N) \leqslant \int_1^N f(t)\,dt \leqslant f(1) + \cdots + f(N-1)$$

Le résultat en découle puisque la série positive $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=1}^N f(n)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est majorée et que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \longmapsto \int_1^x f$ est majorée. On remarquera en effet que si M est un majorant de la suite $\left(\int_1^N f(t)\,dt\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ alors M est un majorant de $x \longmapsto \int_1^x f$ (cela résulte du fait que, f étant positive, cette dernière fonction est croissante). □

Remarque. Dans le cas de convergence, cette démonstration montre que l'on peut comparer la valeur de l'intégrale généralisée et la somme de la série.

Proposition 4.13. *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux. S'il existe une suite (x_n) d'éléments de $[a, b[$ tendant vers b et telle que :*

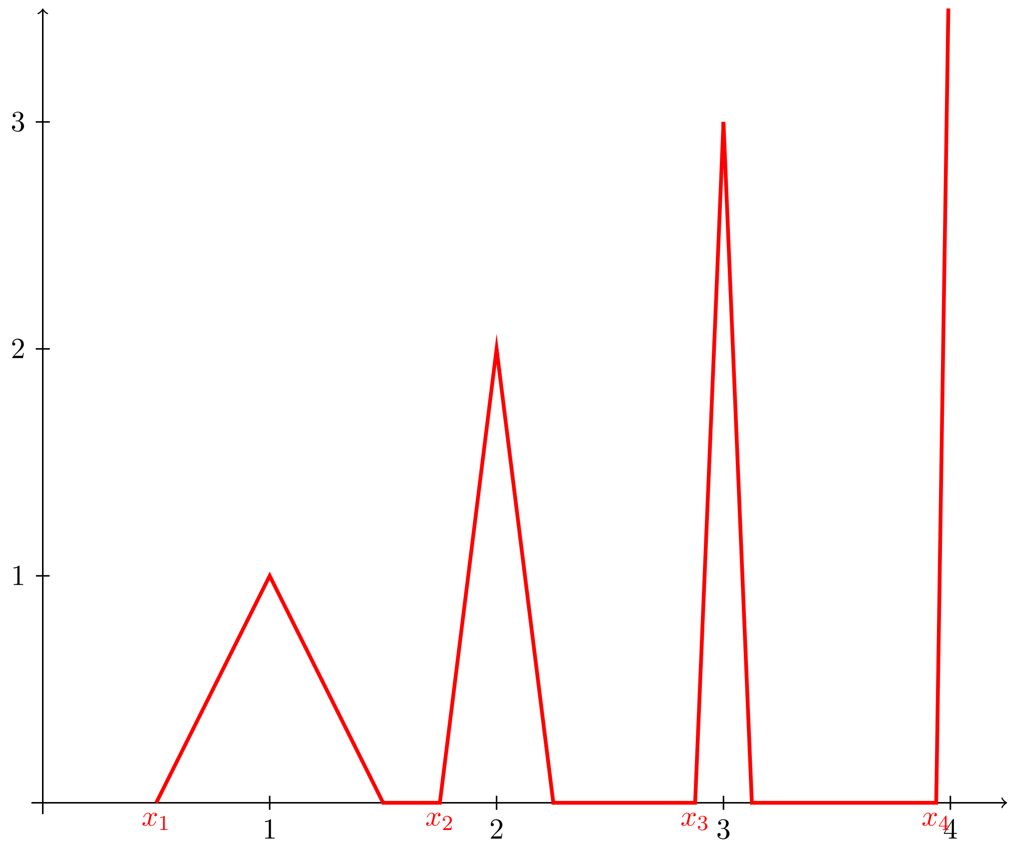
— *la suite de terme général* $\displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)|\ \mathrm{d}t$ *converge vers 0,*

— *la série* $\displaystyle\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\ \mathrm{d}t$ *converge,*

Alors l'intégrale $\displaystyle\int^{b} f(t)\ \mathrm{d}t$ *converge (le résultat est encore valable si* $b = +\infty$*).*

Démonstration : Notons $\displaystyle u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\ \mathrm{d}t$, $\displaystyle S_n = u_1 + \cdots + u_n = \int_{x_1}^{x_{n+1}} f(t)\ \mathrm{d}t$ et S la limite de (S_n).
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n_0 tel que $n \geqslant n_0$ entraîne $|S_n - S| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, pour $x \geqslant x_1$, $\displaystyle\left|\int_{x_1}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t - S\right| \leqslant \left|\int_{x_1}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t - S_n\right| + |S_n - S| = \left|\int_{x_{n+1}}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t\right| + |S_n - S|$. Or par hypothèse, il existe un entier n_1 tel que $n \geqslant n_1$ entraîne $\displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)|\ dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Fixons alors $b > x \geqslant \sup\{x_1, x_{n_0}, x_{n_1}\}$ et posons $n = \sup\{k \in \mathbb{N},\ x_k \leqslant x\}$. n est fini et $n \geqslant n_i$ donc $\displaystyle\left|\int_{x_1}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t - S\right| \leqslant \int_{x}^{x_{n+1}} |f(t)|\ \mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)|\ \mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$.
On en déduit que $\displaystyle\int_{x_1}^{b} f$ converge et que de plus $\displaystyle\int_{x_1}^{b} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f$. □

Exemple.



Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $x_n = n - \frac{1}{2^n}$. Soit f la fonction continue, affine par morceaux définie sur chaque intervalle $[x_n, n + \frac{1}{2^n}]$ par

$$f(x) = \frac{n(x - x_n)}{n - x_n} \text{ si } x \leqslant n \quad \text{ et } \quad f(x) = \frac{n(x - 2n + x_n)}{x_n - n} \text{ si } x \geqslant n$$

(f nulle en dehors de ces intervalles). On considère $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\ \mathrm{d}t$.

D'après le critère de Riemann, la série $\sum u_n$ est convergente puisque $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{n}{2^n}$ (aire d'un triangle) et que $n^3 \frac{n}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (croissances comparées).

Le théorème précédent s'applique alors (car f est positive) et montre que $\int_{x_1}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge et que $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$.

Remarque. On a donc ici une exemple d'une fonction positive et non bornée dont l'intégrale en $+\infty$ converge.