Chapitre 3

Intégrale de Riemann

3.1 Continuité uniforme

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Donc, pour x dans $]0, +\infty[$, si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x' > 0$ avec $|x - x'| < \delta$, on a $|1/x - 1/x'| < \varepsilon$. Si on prend $\varepsilon = 1$, on doit avoir $\delta > 0$ tel que si $x' > 0$ et $|x - x'| < \delta$, alors $|1/x - 1/x'| < 1$. En particulier si on prend $x' = x + \delta/2$, on doit avoir

$$1 > \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x + \delta/2}\right| = \frac{\delta}{(2x + \delta)x}.$$

Or, quand x tend vers 0, cette dernière quantité tend vers $+\infty$! Où est le truc ? La faute dans le raisonnement précédent est que l'on fait comme si δ ne dépendait pas de x : ce n'est pas ce que dit la définition de la continuité sur $]0, +\infty[$. Demander que δ soit indépendant de x amène à une nouvelle notion : la continuité uniforme.

Définition 3.1. *Soit f une fonction réelle définie sur la partie D de $\mathbb{R}$. On dit que f est* ***uniformément continue sur*** *D quand pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour tous x et x' dans D, si $|x - x'| < \delta$, alors $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D,\ \forall x' \in D,\ |x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Ici δ ne dépend que de ε. Comparez l'ordre des quantificateurs avec la définition de la continuité sur D. <u>La notion de continuité uniforme n'a pas de sens en un point : c'est une notion globale</u> et non pas locale. Le raisonnement faux du début montre tout de même que la fonction $x \mapsto 1/x$ n'est pas uniformément continue sur $]0, +\infty[$.

Remarque. Bien évidemment, une fonction uniformément continue sur D est continue sur D.

Théorème 3.2 (Heine)**.** *Une fonction réelle continue sur un segment $[a, b]$ est uniformément continue sur ce segment.*

Démonstration : Soit f continue sur $[a, b]$. On suppose que f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$. Ceci s'écrit

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in [a, b],\ \exists x' \in [a, b],\ |x - x'| < \delta \text{ et } |f(x) - f(x')| \geqslant \varepsilon$$

Dans la suite, on fixe un $\varepsilon > 0$ qui vérifie cette formule. Pour tout entier naturel n, en faisant $\delta = 1/2^n$, on peut trouver u_n et v_n dans $[a, b]$ tels que $|u_n - v_n| \leqslant 1/2^n$ et que $|f(u_n) - f(v_n)| \geqslant \varepsilon$. La suite (u_n) est bornée, donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass on peut en extraire une suite $\left(s_n = u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge. Sa limite $\ell = \lim s_n$ est dans $[a, b]$ (qui est fermé). La suite $\left(t_n = v_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a aussi ℓ pour limite car

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |s_n - t_n| = |u_{\varphi(n)} - v_{\varphi(n)}| < 1/2^{\varphi(n)} \leqslant 1/2^n \quad \text{puisque } \varphi(n) \geqslant n$$

Grâce à la caractérisation séquentielle de la continuité de f en ℓ (qui est dans $[a,b]$), on peut passer à la limite dans l'inégalité large $|f(s_n)-f(t_n)| \geqslant \varepsilon$, ce qui nous donne $|f(\ell)-f(\ell)| \geqslant \varepsilon > 0$, qui est l'absurdité recherchée. □

Un des intérêts de la continuité uniforme est que cela montre que l'on peut approcher des fonctions continues sur un segment par des fonctions « en escalier ». Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$, et fixons $\varepsilon > 0$. D'après le théorème qui précède, on peut trouver $\delta > 0$ tel que pour tous x et x' de $[a,b]$, $|x-x'| < \delta$ entraîne $|f(x)-f(x')| < \varepsilon$. Choisissons un entier naturel N tel que $(b-a)/N < \delta$, et divisons $[a,b]$ en N segments égaux $I_1, \cdots, I_N$. Pour chaque petit segment I_k on pose $m_k = \inf(f(I_k))$ et $M_k = \sup(f(I_k))$. Comme ces bornes sont atteintes sur I_k et que la longueur de I_k est plus petite que δ, on a $M_k - m_k < \varepsilon$. On a donc deux « escaliers » qui encadrent la fonction f sur $[a,b]$. Supposons $f \geqslant 0$, les aires de ces deux escaliers encadrent l'aire sous le graphe de f à moins de $(b-a)\varepsilon$ près, ce qui peut être rendu aussi petit que l'on veut par le choix de ε.

3.2 Continuité par morceaux

On se donne un intervalle fermé borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

Définition 3.3. *On appelle **subdivision** de l'intervalle $[a,b]$ toute famille finie de réels $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$ avec $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$. On appelle **pas** de la subdivision X le réel positif $p(X) = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}}(a_i - a_{i-1})$. Enfin, on dit que la subdivision Y est **plus fine** que la subdivision X quand X est un sous-ensemble de Y.*

Remarques.

- Une subdivision $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$ permet de découper l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles $[a_{i-1}, a_i]$ pour $i = 1, \ldots, n$. Si ces n intervalles ont la même longueur, la subdivision est dite ***régulière*** et on a alors $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$.
- Si X et Y sont deux subdivisions de $[a,b]$, alors la subdivision $X \cup Y$ est plus fine à la fois que X et que Y.

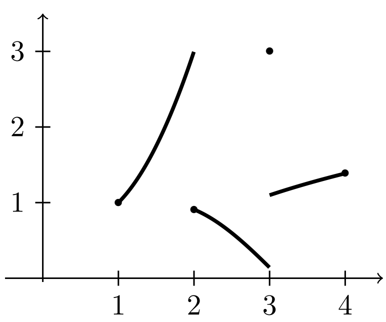
Définition 3.4. *On dit qu'une fonction f à valeurs réelles est **continue par morceaux** sur $[a,b]$, s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ ait un prolongement par continuité $g_i : [a_i, a_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Exemples.

La fonction

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x \in [1,2[\\ \sin x & \text{si } x \in [2,3[\\ 3 & \text{si } x = 3 \\ \ell n\, x & \text{si } x \in]3,4] \end{cases}$$

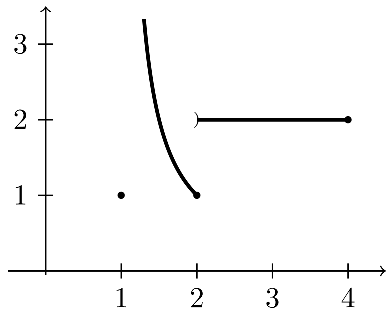
est continue par morceaux sur $[1,4]$.



Par contre, la fonction

$$f : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x \in]1,2] \\ 2 & \text{si } x \in]2,4] \end{cases}$$

n'est pas continue par morceaux sur $[2,4]$. Elle n'est en effet pas prolongeable par continuité sur $[1,2]$.



Définition 3.5. *Soit I un intervalle. On dit qu'une fonction f à valeurs réelles est* ***continue par morceaux*** *sur I si, pour tout $[a,b] \subset I$, f est continue par morceaux sur $[a,b]$.*
On note $C_m(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle I.

Remarque. Une fonction continue sur l'intervalle I est bien sûr continue par morceaux sur I.

3.3 Construction de l'intégrale sur un intervalle fermé borné

3.3.1 Sommes de Darboux

On se donne un intervalle fermé borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction réelle définie et bornée sur $[a,b]$. Soit $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$ une subdivision de $[a,b]$. On pose, pour $i = 1, \ldots, n$

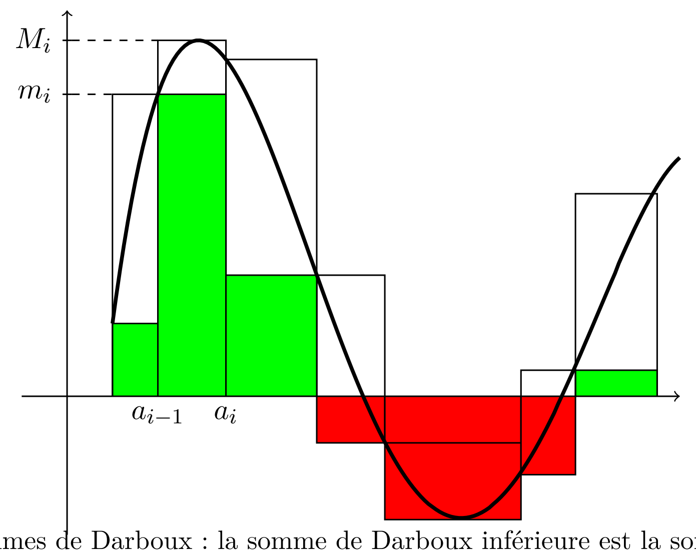
$$m_i = \inf\{f(x),\ x \in [a_{i-1}, a_i]\} \qquad M_i = \sup\{f(x),\ x \in [a_{i-1}, a_i]\}.$$

Ces bornes inférieures et supérieures existent bien parce qu'on a supposé f bornée sur $[a,b]$, et donc a fortiori sur chaque $[a_{i-1}, a_i]$.

Définition 3.6. *On appelle* ***somme de Darboux inférieure*** *pour la fonction f et la subdivision X la somme $s(f,X) = \sum_{i=1}^{n} m_i(a_i - a_{i-1})$.*
On appelle ***somme de Darboux supérieure*** *pour la fonction f et la subdivision X la somme*

$$S(f,X) = \sum_{i=1}^{n} M_i(a_i - a_{i-1}).$$

L'idé de la définition des sommes de Darboux est d'encadrer l'aire « sous le graphe de f » par deux sommes d'aires de rectangles, une « par en-dessous » (somme de Darboux inférieure) et l'autre « par au-dessus » (somme de Darboux supérieure).



Subdivision et sommes de Darboux : la somme de Darboux inférieure est la somme des aires des rectangles, comptés positivement pour ceux coloriés en vert et négativement pour ceux coloriés en rouge

Proposition 3.7. *1) Si la subdivision Y est plus fine que la subdivision X, alors on a : $s(f,X) \leqslant s(f,Y)$ et $S(f,X) \geqslant S(f,Y)$.*
2) Pour toutes subdivisions X et Y, on a $s(f,X) \leqslant S(f,Y)$.

Démonstration : Montrons d'abord 1). Pour cela, il suffit de considérer ce qui se passe quand on ajoute un point à la subdivision X, par exemple quand on intercale c avec $a_{i-1} < c < a_i$. Posons

$$\ell_1 = \inf\{f(x),\ x \in [a_{i-1}, c]\} \quad \text{et} \quad \ell_2 = \inf\{f(x),\ x \in [c, a_i]\}$$

On a bien évidemment $m_i \leqslant \ell_1$ et $m_i \leqslant \ell_2$ (on peut même vérifier que $m_i = \min(\ell_1, \ell_2)$). Donc

$$m_i(a_i - a_{i-1}) \leqslant \ell_1(c - a_{i-1}) + \ell_2(a_i - c),$$

Les autres termes des deux sommes étant deux à deux identiques, cela entraîne finalement que $s(f,X) \leqslant s(f, X \cup \{c\})$. On vérifie de manière analogue que $S(f,X) \geqslant S(f, X \cup \{c\})$.

Montrons maintenant 2). D'après la première partie, on a $s(f,X) \leqslant s(f, X \cup Y)$ et aussi $S(f, X \cup Y) \leqslant S(f,Y)$. Comme il est clair que $s(f, X \cup Y) \leqslant S(f, X \cup Y)$, on a bien finalement $s(f,X) \leqslant S(f,Y)$. □

3.3.2 Fonctions intégrables au sens de Riemann

On suppose toujours la fonction réelle f bornée sur $[a,b]$

Proposition 3.8. *On pose*

$$\begin{aligned} s(f) &= \sup\{s(f,X),\ X \text{ subdivision de } [a,b]\}, \\ S(f) &= \inf\{S(f,X),\ X \text{ subdivision de } [a,b]\}. \end{aligned}$$

Ces bornes inférieures et supérieures sont bien définies, et on a $s(f) \leqslant S(f)$.

Démonstration : Si Y est n'importe quelle subdivision de $[a,b]$, on a, d'après le 2) de la proposition précédente, $S(f,Y) \geqslant s(f,X)$. L'ensemble (non vide) des $s(f,X)$ est majoré par $S(f,Y)$, et donc il a une borne supérieure $s(f)$ qui est inférieure ou égale à $S(f,Y)$. Ainsi l'ensemble (non vide) des $S(f,Y)$ est minoré par $s(f)$, et il a donc une borne inférieure $S(f)$, qui vérifie $s(f) \leqslant S(f)$. □

Définition 3.9. *La fonction f est dite* ***intégrable au sens de Riemann*** *sur l'intervalle $[a,b]$ quand $s(f) = S(f)$. Son* ***intégrale*** *sur $[a,b]$ est alors cette valeur commune $s(f) = S(f)$, et on la note*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Le x est une *variable muette*, on peut le remplacer par n'importe quel autre nom, comme $\int_a^b f(u)du$. On utilisera aussi les notations $\int_a^b f$ et $\int_{[a,b]} f$.

Exemple. La fonction constante égale à λ sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et on a $\displaystyle\int_a^b \lambda\,dt = \lambda(b-a)$.
En effet, pour toute subdivision X de $[a,b]$, $s(f,X) = \lambda(b-a) = S(f,X)$.

L'idée dans la définition des fonctions intégrables est que l'encadrement entre les sommes de Darboux inférieures et les sommes de Darboux supérieures peut être rendu aussi précis que l'on veut, déterminant ainsi un réel unique. Il est commode d'utiliser le critère d'intégrabilité suivant :

Proposition 3.10 (Critère de Riemann-intégrabilité)**.** *Soit f une fonction réelle définie et bornée sur l'intervalle $[a,b]$. La fonction f est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe une subdivision X de $[a,b]$ telle que $S(f,X) - s(f,X) < \epsilon$.*

Démonstration : Supposons f intégrable, et donnons nous $\epsilon > 0$. D'après la définition de borne supérieure, il existe une subdivision Y de $[a,b]$ telle que $s(f,Y) > \int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}$. De même, il existe une subdivision Z telle que $S(f,Z) < \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$. En posant $X = Y \cup Z$, on obtient

$$S(f,X) - s(f,X) \leqslant S(f,Z) - s(f,Y) < \epsilon.$$

Réciproquement, supposons le critère vérifié. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver une subdivision X telle que $S(f,X) - s(f,X) < \varepsilon$, et donc comme $s(f,X) \leqslant s(f) \leqslant S(f) \leqslant S(f,X)$ on a $S(f) - s(f) < \varepsilon$. Comme ceci doit avoir lieu pour tout $\varepsilon > 0$, c'est que $s(f) = S(f)$ et donc que f est intégrable sur $[a,b]$. □

Proposition 3.11 (Caractérisation de l'intégrale de Riemann)**.** *Soit f une fonction réelle définie et bornée sur l'intervalle $[a,b]$. La fonction f est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si la différence des sommes de Darboux $S(f,X) - s(f,X)$ tend vers 0 quand le pas $p(X)$ de la subdivision X de $[a,b]$ tend vers 0. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est alors la limite des sommes de Darboux supérieures $S(f,X)$ (ou inférieures $s(f,X)$) quand le pas $p(X)$ de la subdivision X de $[a,b]$ tend vers 0.*

Démonstration : • La condition est suffisante d'après la proposition précédente. En effet, pour $\varepsilon > 0$ fixé, l'hypothèse assure l'existence de $\delta > 0$ tel que $p(X) < \delta \Longrightarrow S(f,X) - s(f,X) < \varepsilon$. Le choix d'une subdivision régulière de pas $\dfrac{b-a}{n} < \delta$ assure alors que $S(f,X) - s(f,X) < \varepsilon$.
• Etudions la réciproque.
f étant bornée, on peut écrire : $\forall x \in [a,b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Notons alors $A = M - m$. Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Toujours d'après la proposition précédente, il existe une subdivision $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$ telle que $S(f,X) - s(f,X) < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit alors Y une subdivision dont le pas est strictement inférieur à $\delta = \operatorname*{Min}_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_i - a_{i-1})$. Chaque intervalle de Y contenant au plus l'un des a_i, il y a exactement $n+1$ intervalles de Y qui contiennent un élément de X et chacun des autres intervalles de Y est inclus dans un intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ de X. On a donc $S(f,Y) - s(f,Y) \leqslant S(f,X) - s(f,X) + (n+1)p(Y)A$. Par suite, si $p(Y) < \inf(\delta, \frac{\varepsilon}{2A(n+1)})$ alors $S(f,Y) - s(f,Y) \leqslant \varepsilon$ d'où le résultat.

Enfin, pour toute subdivision X, $s(f,X) \leqslant s(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = S(f) \leqslant S(f,X)$ donc par exemple $0 \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt - s(f,X) \leqslant S(f,X) - s(f,X)$ et par suite $\displaystyle\lim_{p(X)\to 0} s(f,X) = \int_a^b f$.
□

3.3.3 Sommes de Riemann

Définition 3.12. *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction et $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$ une subdivision de $[a,b]$. On appelle* ***somme de Riemann*** *de f relativement à X toute somme de la forme $R(f,X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\theta_i)(a_i - a_{i-1})$ avec, pour tout i de $\{1, \cdots, n\}$, $\theta_i \in [a_{i-1}, a_i]$.*

Proposition 3.13. *Soit f une fonction réelle intégrable sur l'intervalle $[a,b]$. Alors toute somme de Riemann $R(f,X)$ tend vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ quand le pas $p(X)$ de la subdivision X de $[a,b]$ tend vers 0.*

Démonstration : Clair puisque $s(f,X) \leqslant R(f,X) \leqslant S(f,X)$. □

Remarque. On choisira souvent une subdivision de $[a,b]$ en intervalles de même longueur $X_n = \{a_0, \ldots, a_n\}$ avec $a_i = a + i(b-a)/n$ (pour n entier strictement positif).

Lorsque f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, on a alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\theta_i) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.
En particulier,

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est Riemann-intégrable sur } [a,b], \text{ alors } \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Exemple. On veut calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.
Si on pose $f(x)=\sqrt{x}$, on peut réécrire le terme général de la suite comme

$$\frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(1)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1-0}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(0+i\frac{1-0}{n}\right)$$

et on reconnait une somme de Riemann pour f sur $[0,1]$. Comme f est intégrable sur $[0,1]$ (voir plus loin), la limite est

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

3.3.4 Intégration des fonctions à valeurs complexes

Définition 3.14. *Une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est dite intégrable sur $[a,b]$ si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont intégrables sur $[a,b]$ et on pose*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt$$

De même, une fonction à valeurs complexes est dite continue si ses parties réelle et imaginaire sont continues.
L'intégrale des fonctions à valeurs complexes héritera de nombreuses propriétés de l'intégrale des fonctions réelles (linéarité, relation de Chasles, passage au module ...)

3.4 Classes de fonctions intégrables au sens de Riemann

Proposition 3.15 (Fonctions continues)**.** *Toute fonction continue sur le segment $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.*

Démonstration : On sait déjà que si f est continue sur $[a,b]$, elle est bornée sur $[a,b]$. On sait aussi, par le théorème de Heine, que f est uniformément continue. Donc, quand on se donne $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que, pour tous x,y de $[a,b]$, si $|x-y|<\eta$ alors $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/(b-a)$. Fixons un entier $n>(b-a)/\eta$. Sur chaque segment $[a_{i-1},a_i]$ découpé par la subdivision régulière $X_n=\{a_0,\cdots,a_n\}$ (où $a_i=a+i\frac{b-a}{n}$), la fonction f atteint sa borne inférieure m_i et sa borne supérieure M_i : on a $m_i=f(x_i)$ et $M_i=f(y_i)$, et comme x_i et y_i appartiennent tous les deux à l'intervalle $[a_{i-1},a_i]$ de longueur $(b-a)/n<\eta$, on doit avoir $M_i-m_i<\varepsilon/(b-a)$. Donc

$$S(f,X_n)-s(f,X_n)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\frac{b-a}{n} < \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{n}=\varepsilon,$$

et le critère d'intégrabilité est vérifié.
On remarque qu'on a en fait montré que les deux suites $(s(f,X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S(f,X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont $\displaystyle\int_a^b f$ comme limite commune quand n tend vers l'infini. □

Proposition 3.16 (Fonctions monotones)**.** *Toute fonction monotone sur le segment $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.*

Démonstration : On va traiter le cas de f croissante (et non constante). Tout d'abord, f est bornée sur $[a,b]$ puisque pour tout $x \in [a,b]$ on a $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$. On utilise la subdivision régulière X_n introduite ci-dessus. Puisque f est croissante, la borne supérieure (respectivement inférieure) de f sur $[a_{i-1}, a_i]$ est $f(a_i)$ (resp. $f(a_{i-1})$). On a donc

$$s(f, X_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a_{i-1}), \qquad S(f, X_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a_i).$$

Ceci donne $S(f,X_n) - s(f,X_n) = (f(b)-f(a))(b-a)/n$. Si on se donne $\varepsilon > 0$, alors en choisissant l'entier $n > (f(b)-f(a))(b-a)/\varepsilon$, on obtient $S(f,X_n) - s(f,X_n) < \varepsilon$. Le critère d'intégrabilité est bien vérifié. □

Définition 3.17. *On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est* ***en escalier*** *s'il existe une subdivision $X = \{a_0, \dots, a_n\}$ de $[a,b]$ telle que, pour tout i de $\{1, \cdots, n\}$, la restriction de f à l'intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ soit constante. La subdivision X est alors dite* ***adaptée*** *à f.*

Proposition 3.18 (Intégrale des fonctions en escalier)**.**
Toute fonction en escalier $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$. De plus, si $X = \{a_0, \dots, a_n\}$ avec $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à φ c'est à dire telle que φ soit constante égale à λ_i sur $]a_{i-1}, a_i[$, alors $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - a_{i-1})$.

Démonstration : φ étant bornée, on peut encore écrire : $\forall x \in [a,b]$, $m \leqslant \varphi(x) \leqslant M$ et noter $A = M - m$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{2}{k} < \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Min}}\,(a_i - a_{i-1})$. Considérons la subdivision X'_k de $[a,b]$ définie par :

$$a'_0 = a_0 < a'_1 = a_0 + \frac{1}{k} < a'_2 = a_1 - \frac{1}{k} < \cdots < a'_{2n} = a_n - \frac{1}{k} < a'_{2n+1} = a_n$$

et posons $\Delta = S(\varphi, X'_k) - s(\varphi, X'_k)$. La subdivision X'_k comporte :

- n intervalles du type $[a_{i-1} + \frac{1}{k}, a_i - \frac{1}{k}]$ sur lesquels φ est constante ($m' = M' = \lambda_i$) et qui apportent donc une contribution nulle à Δ.
- $n-1$ intervalles du type $[a_i - \frac{1}{k}, a_i + \frac{1}{k}]$ (donc de longueur $\frac{2}{k}$) qui apportent chacun à Δ une contribution majorée par $\frac{2}{k}A$.
- les intervalles $[a_n - \frac{1}{k}, a_n]$ et $[a_0, a_0 + \frac{1}{k}]$ qui apportent chacun une contribution majorée par $\frac{1}{k}A$.

Finalement, $S(\varphi, X'_k) - s(\varphi, X'_k) \leqslant \dfrac{2An}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et φ est bien intégrable.

Ce raisonnement montre d'autre part que $s(\varphi, X'_k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - a_{i-1} - \frac{2}{k}) + B$ avec $|B| \leqslant \dfrac{2Mn}{k}$ et donc $\displaystyle\lim_{k\to\infty} s(\varphi, X'_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - a_{i-1})$.

Comme le pas de X'_k ne tend pas vers 0, on ne peut pas conclure à ce stade. On considère alors une subdivision plus fine $X''_k = \{a_0, a_0 + \frac{1}{k}, a_0^1, a_0^2, \cdots, a_0^{\alpha_0}, a_1 - \frac{1}{k}, \cdots, a_n - \frac{1}{k}, a_n\}$ obtenue en subdivisant chaque $[a_i + \frac{1}{k}, a_{i+1} - \frac{1}{k}]$ à l'aide de points $a_i^1, a_i^2, \cdots, a_i^{\alpha_i}$ tels que $a_i^j - a_i^{j-1} < \frac{1}{k}$. En notant $a_i^0 = a_i + \frac{1}{k}$ et $a_i^{\alpha_i+1} = a_{i+1} - \frac{1}{k}$, la contribution totale de ces sous-intervalles de $[a_i + \frac{1}{k}, a_{i+1} - \frac{1}{k}]$ à $s(\varphi, X''_k)$ est $\displaystyle\sum_{j=1}^{\alpha_i+1} (a_i^j - a_i^{j-1})\lambda_i = (a_{i+1} - a_i - \frac{2}{k})\lambda_i$. On a donc $s(\varphi, X''_k) = s(\varphi, X'_k)$ et le résultat s'en déduit puisque $p(X''_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. □

Théorème 3.19 (Fonctions continues par morceaux)**.** *Toute fonction continue par morceaux sur le segment* $[a, b]$ *est intégrable au sens de Riemann sur* $[a, b]$*. De plus, si la subdivision* $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ *est telle que la restriction de* f *à chaque intervalle ouvert* $]a_i, a_{i+1}[$ *ait un prolongement par continuité* $g_i : [a_i, a_{i+1}] \to \mathbb{R}$*, alors :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} g_i(t)\,dt$$

Démonstration : Cela résultera de la proposition 3.22 et de la relation de Chasles (énoncées et démontrées plus loin). □

3.5 Opérations sur les fonctions intégrables

Proposition 3.20 (Linéarité de l'intégrale)**.** *Soient* f *et* g *deux fonctions intégrables sur* $[a, b]$*, et soit* λ *un nombre réel. Alors :*

1. $f + g$ *est intégrable sur* $[a, b]$ *et* $\displaystyle\int_a^b (f + g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$*,*
2. λf *est intégrable sur* $[a, b]$ *et* $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$*.*

Démonstration : Montrons 1. Si X est une subdivision de $[a, b]$, on a sur chaque intervalle $[a_{i-1}, a_i]$ l'inégalité

$$\inf\{(f + g)(x),\ x \in [a_{i-1}, a_i]\} \geqslant \inf\{f(x),\ x \in [a_{i-1}, a_i]\} + \inf\{g(x),\ x \in [a_{i-1}, a_i]\}.$$

En effet, le terme de droite de l'inégalité est un minorant de $f+g$ sur $[a_{i-1}, a_i]$. En sommant ces inégalités (après multiplication par $a_i - a_{i-1} > 0$), on obtient $s(f + g, X) \geqslant s(f, X) + s(g, X)$. De manière symétrique on a $S(f + g, X) \leqslant S(f, X) + S(g, X)$. On en déduit donc

$$0 \leqslant S(f + g, X) - s(f + g, X) \leqslant S(f, X) - s(f, X) + S(g, X) - s(g, X)$$

Puisque f et g sont intégrables sur $[a, b]$, le membre de droite de cette dernière inégalité tend vers 0 lorsque $p(X)$ tend vers 0. Il en est donc de même de $S(f + g, X) - s(f + g, X)$ et $f + g$ est donc intégrable. De plus,

$$s(f, X) + s(g, X) \leqslant s(f + g, X) \leqslant \int_a^b (f + g) \leqslant S(f + g, X) \leqslant S(f, X) + S(g, X)$$

En passant à la limite dans ces inégalités on obtient bien $\displaystyle\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.
Montrons 2. On exclut le cas $\lambda = 0$ qui est trivial. En supposant $\lambda > 0$, on a pour toute subdivision X les égalités $s(\lambda f, X) = \lambda s(f, X)$ et $S(\lambda f, X) = \lambda S(f, X)$. Si $\lambda < 0$, la multiplication par λ renverse les inégalités et donc $s(\lambda f, X) = \lambda S(f, X)$ et $S(\lambda f, X) = \lambda s(f, X)$.
Comme f est intégrable sur $[a, b]$, $\displaystyle\lim_{p(X)\to 0} s(f, X) = \int_a^b f = \lim_{p(X)\to 0} S(f, X)$. Par suite, $\displaystyle\lim_{p(X)\to 0} s(\lambda f, X) = \lambda \int_a^b f = \lim_{p(X)\to 0} S(\lambda f, X)$ ce qui montre que λf est intégrable et que son intégrale est λ fois celle de f. □

Nous admettrons par ailleurs le résultat suivant :

Théorème 3.21. *Si* f_1 *et* f_2 *sont des fonctions bornées intégrables sur l'intervalle* $[a, b]$*, le produit* $f_1 f_2$ *est aussi intégrable.*

Conséquence. Comme on sait, par ailleurs, que $f_1 + f_2$ est intégrable, on déduit : L'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann sur le segment $[a, b]$ est un anneau.

Proposition 3.22. *Si la fonction f est intégrable sur $[a, b]$ et si g est obtenue à partir de f en modifiant la valeur de f en un nombre fini de points de $[a, b]$, alors g est aussi intégrable sur $[a, b]$ et $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$.*

Démonstration : Supposons que g diffère de f uniquement en les points $c_1, c_2, \cdots, c_k$ de $[a, b]$. Alors $g - f$ est nulle en dehors de ces points et c'est donc une fonction en escalier. Par suite $g - f$ est intégrable sur $[a, b]$ et son intégrale est nulle. On en déduit que $g = (g - f) + f$ est intégrable et que son intégrale est $\displaystyle\int_a^b f$. □

3.6 Propriétés de l'intégrale de Riemann

3.6.1 Propriété de la moyenne

Proposition 3.23. *Soit f une fonction réelle intégrable sur $[a, b]$, et soit m et M des réels tels que pour tout x de $[a, b]$ on a $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Alors*

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a).$$

Si en outre f est continue sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a} = f(c)$.

Démonstration : Le premier point est clair puisque, pour toute subdivision X de $[a, b]$, on a :

$$m(b - a) \leqslant s(f, X) \leqslant S(f, X) \leqslant M(b - a).$$

Si f est continue sur le segment $[a, b]$ elle est bornée et atteint ses bornes en des points c_1 et c_2 de $[a, b]$. Le premier point montre alors que $\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a}$ est un réel compris entre $f(c_1)$ et $f(c_2)$. f étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un c dans $[a, b]$ tel que $\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a} = f(c)$. □

La quantité $(\int_a^b f(x)\,dx)/(b - a)$ est appelé ***valeur moyenne*** de f sur $[a, b]$.
La propriété de la moyenne nous dit donc que si f est comprise entre m et M sur $[a, b]$, alors sa valeur moyenne est aussi comprise entre m et M.

3.6.2 Relation de Chasles

Proposition 3.24. *Soit $a < b < c$ trois nombres réels, et soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$. Alors f est intégrable sur $[a, c]$ et*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Démonstration : Soit $X = \{a_0, ..., a_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ (en particulier $a_n = b$), et soit $Y = \{b_0, ..., b_p\}$ une subdivision de $[b, c]$ ($b_0 = b$). Alors $Z = \{a_0, ..., a_n, b_1, ..., b_p\}$ est une subdivision de $[a, c]$, et on a

$$s(f, X) + s(f, Y) = s(f, Z) \qquad S(f, X) + S(f, Y) = S(f, Z).$$

Donnons nous $\varepsilon > 0$. Il existe des subdivisions X et Y de $[a,b]$ et $[b,c]$ telles que

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,X) \leqslant S(f,X) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\int_b^c f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,Y) \leqslant S(f,Y) < \int_b^c f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2},$$

En prenant Z la subdivision de $[a,c]$ définie ci-dessus, on obtient

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx - \varepsilon < s(f,Z) \leqslant S(f,Z) < \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \varepsilon,$$

Ce qui montre que f est intégrable sur $[a,c]$, et que son intégrale sur $[a,c]$ est la somme de celles sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$. □

Exercice 3.1. Montrer que si f est intégrable sur $[a,b]$ et si $a < c < b$, alors f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$.

On veut étendre la relation que l'on vient de montrer au cas où les nombres réels a, b et c sont en position quelconque. Pour ceci, on convient de poser :

$$\boxed{\text{Si } b < a, \text{ alors } \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \qquad \text{Si } a = b, \int_a^a f(x)dx = 0.}$$

Avec cette convention, on obtient :

Corollaire 3.25 (Relation de Chasles)**.** *Soit a, b et c trois nombres réels. Soit f une fonction intégrable sur un intervalle fermé contenant a, b et c. Alors*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Démonstration : Traitons seulement le cas $a < c < b$. La proposition précédente donne

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx.$$

et on retrouve bien la relation de Chasles avec la convention adoptée. □

Exercice 3.2. À l'aide de cette relation, démontrer le théorème 3.19.

3.6.3 Intégrale et relation d'ordre

Proposition 3.26 (Positivité)**.** *Soit f une fonction réelle intégrable sur $[a,b]$. Si f est positive ou nulle sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.*
En outre, si f est continue sur $[a,b]$, l'intégrale n'est nulle que si et seulement si f est identiquement nulle.

Démonstration : Le premier point résulte de la formule de la moyenne (en prenant $m = 0$).
Supposons f positive ou nulle et non identiquement nulle sur $[a,b]$. Il existe donc $c \in [a,b]$ tel que $f(c) > 0$. Par continuité de f, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ et on peut donc trouver un réel $\delta > 0$ tel que la fonction f soit minorée par $\dfrac{f(c)}{2}$ sur $[c-\delta, c+\delta]$. La propriété de la moyenne montre alors que $\displaystyle\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx$ est minoré par $(c+\delta-(c-\delta))\dfrac{f(c)}{2}$. Par ailleurs on peut minorer $\displaystyle\int_a^{c-\delta} f(x)dx$ et $\displaystyle\int_{c+\delta}^b f(x)dx$ par 0, puisque f est positive ou nulle. Donc, par la relation de Chasles,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \geqslant (c+\delta-(c-\delta))\frac{f(c)}{2} = \delta f(c) > 0.$$

□

Attention : on ne peut pas enlever l'hypothèse « f continue » dans la proposition précédente. Par exemple la fonction f qui vaut 0 sur $[0, 1/2[\cup]1/2, 1]$ et telle que $f(1/2) = 1$ a une intégrale nulle, bien que f soit positive ou nulle et non identiquement nulle sur $[0, 1]$.

Corollaire 3.27 (Croissance de l'intégrale)**.** *Soit f et g deux fonctions réelles intégrables sur $[a, b]$. Si on a $f \leqslant g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.*

Démonstration : Cela résulte de la proposition précédente (puisque $g - f \geqslant 0$) et de la linéarité de l'intégrale. □

Proposition 3.28. *Soit f une fonction réelle intégrable sur $[a, b]$. Alors sa valeur absolue $|f|$ est aussi intégrable sur $[a, b]$, et on a*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Démonstration : Montrons d'abord que $|f|$ est intégrable. Soit X une subdivision de $[a, b]$. Plaçons nous sur un intervalle $[a_{i-1}, a_i]$ du découpage donné par la subdivision. Soit m_i et M_i les bornes inférieure et supérieure de f sur cet intervalle, l_i et L_i celles de $|f|$. Trois cas sont à distinguer :

- Si $0 \leqslant m_i \leqslant M_i$, alors $l_i = m_i$ et $L_i = M_i$.
- Si $m_i \leqslant M_i \leqslant 0$, alors $l_i = -M_i$ et $L_i = -m_i$.
- Si $m_i < 0 < M_i$, alors $l_i \geqslant 0$ et $L_i = \max(-m_i, M_i)$.

Dans les trois cas, on a $L_i - l_i \leqslant M_i - m_i$. Comme ceci a lieu pour tout intervalle de la subdivision, on en déduit $S(|f|, X) - s(|f|, X) \leqslant S(f, X) - s(f, X)$. Cette inégalité et l'intégrabilité de f montrent que $|f|$ satisfait le critère d'intégrabilité.
L'inégalité de la proposition vient de l'inégalité $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, et du corollaire ci-dessus. □

Proposition 3.29 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit f et g deux fonctions réelles intégrables sur $[a, b]$. Alors :*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)$$

De plus, si f et g sont continues, on a égalité si et seulement si f est identiquement nulle ou s'il existe une constante λ de $\mathbb{R}$ telle que $g = \lambda f$.

Démonstration : Posons $\alpha = \displaystyle\int_a^b f^2(x)dx$, $\beta = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx$ et $\gamma = \displaystyle\int_a^b g^2(x)dx$. Soit X un nombre réel. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b (g - Xf)^2$ est positive ou nulle, puisque la fonction qu'on intègre est un carré qui est donc positif ou nul. Puisque $(g - Xf)^2 = g^2 - 2Xfg + X^2f^2$, la linéarité de l'intégrale conduit à $\displaystyle\int_a^b (g - Xf)^2 = \int_a^b g^2 - 2X\int_a^b fg + X^2\int_a^b f^2$. On en déduit que pour tout réel X, $\alpha X^2 - 2\beta X + \gamma \geqslant 0$.

- Si $\alpha = \displaystyle\int_a^b f^2(x)dx \neq 0$, on a un trinôme du second degré qui est de signe constant donc de discriminant négatif (le trinôme aurait sinon deux racines distinctes et changerait donc de signe). Par suite $\Delta = 4\beta^2 - 4\alpha\beta \leqslant 0$ ce qui donne l'inégalité voulue.

- Si $\alpha = \int_a^b f^2(x)dx = 0$, vérifier l'inégalité annoncée revient alors à montrer que $\int_a^b fg = 0$.

  Or, si tel n'était pas le cas, on aurait par exemple $\beta = \int_a^b fg < 0$ et en faisant tendre X vers $-\infty$ dans l'inégalité (vraie pour tout réel X) $-2\beta X + \gamma \geqslant 0$ on obtiendrait une contradiction.

Traitons à présent le cas d'égalité.

- Si f est la fonction nulle ou si $g = \lambda f$ pour une constante réelle λ, on vérifie directement l'égalité $\beta^2 = \alpha\gamma$.
- Si $\beta^2 = \alpha\gamma$ et si f n'est pas la fonction nulle, alors le polynôme du second degré précédent a un discriminant nul donc une racine réelle double x_0. Par suite, $\int_a^b (g - x_0 f)^2(x)dx = 0$.

  Puisque $(g - x_0 f)^2$ est une fonction continue (car f et g le sont) positive ou nulle sur $[a, b]$, on a nécessairement $g = x_0 f$ d'après la proposition 3.26.

□

Après cette exposition de la théorie, quelques mots d'histoire. Eudoxe (4ème siècle av. J.C.) et Archimède (3ème siècle av. J.C.) justifiaient rigoureusement des formules de volumes ou d'aires en utilisant une méthode d'approximation par valeurs supérieures et par valeurs inférieures (méthode d'exhaustion). Avec l'apparition du calcul infinitésimal à la fin du 17ème siècle, l'accent est mis sur la primitive (ou « intégrale indéfinie ») comme opération inverse de la dérivation. Leibniz introduit la notation $\int f(x)dx$; le $\int$ est un S comme l'initiale de « summa », et derrière la notation on retrouve l'idée d'une somme d'aires de rectangles de hauteur $f(x)$ et de largeur infinitésimale dx. Au 19ème siècle, Cauchy revient aux procédés d'approximation d'intégrales définies, pour lesquelles il utilise la notation avec les bornes $\int_a^b f(x)dx$. À ce moment, la question « quelles fonctions sont intégrables ? » se pose à propos des développements de fonctions en séries de Fourier (vous verrez cela dans la suite de vos études), problème qui a motivé les travaux sur les fondements de l'analyse. Vers 1850, Riemann donne un critère de convergence des « sommes de Riemann », caractérisant les fonctions intégrables « au sens de Riemann ». Les problèmes d'intégrabilité des fonctions continues ne furent définitivement réglés qu'après la démonstration du théorème de Heine (1870), dans un mémoire de Darboux en 1875.

La théorie de l'intégrale de Riemann n'est pas la seule possible. La grande théorie « concurrente » est celle de l'intégrale de Lebesgue. Cette dernière est plus commode pour certains problèmes, et plus de fonctions sont intégrables (bien entendu, elle donne exactement les mêmes intégrales pour les fonctions intégrables au sens de Riemann). Par exemple, la fonction définie sur $[0, 1]$ qui vaut 1 pour tous les rationnels et 0 pour les réels non rationnels n'est pas intégrable au sens de Riemann. Vous pouvez vérifier que pour n'importe quelle subdivision de $[0, 1]$, la somme de Darboux inférieure vaut 0 tandis que la somme de Darboux supérieure vaut 1. Par contre cette fonction est intégrable au sens de Lebesgue sur [0, 1], et son intégrale vaut 0.

3.7 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Théorème 3.30. *Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I. Soit $a \in I$. Pour $x \in I$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Alors la fonction F est dérivable sur I, et sa dérivée F' est égale à f. Autrement dit, F est une* ***primitive*** *de f sur I.*

En conséquence, toute fonction réelle continue sur un intervalle I a une primitive sur I.

Démonstration : Si x et $x+h$ sont dans I, on a, par la relation de Chasles,

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(x)dx$$

puis par la propriété de la moyenne $F(x+h) - F(x) = hf(u)$ avec u compris entre x et $x+h$. Pour $h \neq 0$ on a finalement $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(u)$, et quand h tend vers 0, u qui est coincé entre x et $x+h$ tend vers x. Comme f est continue sur I, $f(u)$ tend vers $f(x)$. Ceci établit le théorème. □

Rappel : Deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante.

Remarque. Si F est une primitive de f sur I, alors pour tous les réels a et b de I on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

On emploie souvent la notation $[F(x)]_a^b$ pour désigner $F(b) - F(a)$.

Exercice 3.3. Montrer que la fonction $\Phi : x \longmapsto \int_x^{x^2} \ell n(t)dt$ est définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, et que sa dérivée est $\Phi' : x \longmapsto (4x-1)\ell n\, x$.

3.8 Calcul d'intégrales

3.8.1 Utilisation des primitives

Cela consiste à utiliser le dernier résultat sous couvert de trouver une primitive de la fonction à intégrer. Le tableau des primitives usuelles peut ici être très utile…

3.8.2 Intégration par parties

Théorème 3.31 (Intégration par parties)**.** *Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I contenant les réels a et b. Alors*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Démonstration : f et g étant dérivables sur I, il en est de même de fg et on a (dérivation d'un produit) $(fg)' = f'g + fg'$. Toutes ces fonctions étant Riemann-intégrables (car continues) sur $[a, b]$ (ou $[b, a]$), la linéarité de l'intégrale entraîne $\int_a^b fg' = \int_a^b (fg)' - \int_a^b f'g$. Une primitive de $(fg)'$ étant fg, le résultat annoncé en découle. □

Corollaire 3.32 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** *Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I. Pour tous réels a et b dans I on a*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + (b-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt$$

Démonstration : Pour $n = 0$ et f de classe C^1, la formule se résume à $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt$ ce qui résulte de l'égalité $\int_a^b f'(t)dt = [f(t)]_a^b$.

Pour $n=1$ et f de classe C^2, on procède à une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f'(t)dt$. Les fonctions $u : t \mapsto t-b$ (noter ce judicieux choix de u comme primitive de la fonction constante égale à 1) et $v = f'$ étant de classe C^1 sur I, on a $\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t))]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$ soit $\int_a^b f'(t)\,dt = [(t-b)f'(t)]_a^b - \int_a^b (t-b)f''(t)\,dt = (b-a)f'(a) + \int_a^b (b-t)f''(t)dt$.

On raisonne en fait par récurrence sur n. Supposons $n \in \mathbb{N}^*$, et la formule établie pour $n-1$. Le reste de la formule à l'ordre $n-1$ peut de même s'intégrer par parties (car on suppose f de classe C^{n+1}) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}dt &= \frac{1}{(n-1)!}\left[f^{(n)}(t)\frac{-(b-t)^n}{n}\right]_a^b - \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{-(b-t)^n}{n}dt \\ &= (b-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule à l'ordre n. □

Conséquence. (Inégalité de Taylor-Lagrange)
Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I telle que $f^{(n+1)}$ soit majorée en valeur absolue par un réel M sur I. Alors, pour tous a et b dans I on a :

$$\left|f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \cdots - (b-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right| \leqslant M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Démonstration : Cela résulte de la majoration de la valeur absolue d'une intégrale par l'intégrale de la valeur absolue (prendre garde à l'ordre des bornes). □

3.8.3 Changement de variables

Théorème 3.33 (Changement de variables)**.** *Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert J, et soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle ouvert I et à valeurs dans J. Si a et b sont dans I,*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Démonstration : Soit F une primitive de f sur J. φ est dérivable sur I et à valeurs dans J, et F est dérivable sur J donc (dérivation d'une composée) $F\circ\varphi$ est dérivable sur I et on a $(F\circ\varphi)' = \varphi' \times f\circ\varphi$. Toutes ces fonctions étant Riemann-intégrables (car continues) sur $[a,b]$ (ou $[b,a]$), cela entraîne $\displaystyle\int_a^b (F\circ\varphi)' = \int_a^b \varphi'\times f\circ\varphi$ soit $F[\varphi(b)] - F[\varphi(a)] = \displaystyle\int_a^b \varphi'\times f\circ\varphi$ ce qui est le résultat annoncé puisque $F[\varphi(b)] - F[\varphi(a)] = [F(x)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$. □

3.9 Intégrales des fonctions rationnelles

Les fonctions rationnelles en x (quotients de deux fonctions polynômes) sont des fonctions dont on peut toujours calculer une primitive (en théorie du moins). L'outil fondamental est la décomposition en éléments simples, qui permet d'écrire une fonction rationnelle comme somme :

- d'une fonction polynôme (partie entière) dont on a facilement une primitive,
- d'éléments simples de première espèce du type $\dfrac{\lambda}{(x-a)^n}$, dont on connaît une primitive puisque

$$\int \frac{\lambda}{(x-a)^n}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{1-n}\,\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} & \text{si } n \neq 1, \\ \lambda \ell n|x-a| & \text{si } n = 1\end{cases}$$

• d'éléments simples de deuxième espèce du type $\dfrac{\lambda x+\mu}{\left((x-a)^2+b^2\right)^n}$ avec $b \neq 0$.

Pour les éléments simples de deuxième espèce, on écrit d'abord

$$\int \frac{\lambda x+\mu}{\left((x-a)^2+b^2\right)^n}\,dx = \frac{\lambda}{2}\int \frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^n}\,dx + \frac{\lambda a+\mu}{b^{2n-1}}\int \frac{\frac{dx}{b}}{\left(\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1\right)^n}.$$

Pour la première primitive, on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u^n}$ et donc :

$$\int \frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^n}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-n}\,\dfrac{1}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{n-1}} & \text{si } n \neq 1,\\ \ell n\left((x-a)^2+b^2\right) & \text{si } n=1 \end{cases}$$

La deuxième primitive se ramène, par le changement de variable $t=(x-a)/b$, $dt=dx/b$, au calcul de $I_n(t)=\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$. On a $I_1(t)=\arctan t$, et $I_n(t)$ se calcule par récurrence sur n en utilisant une intégration par parties.

$$\begin{aligned} I_n(t) &= \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{t}{(1+t^2)^n} - \int \frac{-2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt \\ &= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n\int\left(\frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\right)dt = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}, \end{aligned}$$

d'où $I_{n+1} = \dfrac{1}{2n}\left((2n-1)I_n + \dfrac{t}{(1+t^2)^n}\right)$.

Ainsi, en théorie, on sait calculer une primitive de n'importe quelle fraction rationnelle en x, en suivant le chemin ci-dessus. Mais ATTENTION : il faut éviter de se lancer sans réfléchir dans une décomposition en éléments simples. Avant, il vaut mieux voir s'il n'y a pas plus simple, par exemple grâce à un changement de variables.

Exemple. La calcul de $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x^2+1)^3}$ risque d'être très pénible en décomposant en éléments simples. Par contre, en effectuant le changement de variable $u=x^2$, on a

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)(x^2+1)^3} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u-1)(u+1)^3},$$

Le théorème de décomposition en éléments simples assure alors l'existence de $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que :

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)^3} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{(u+1)^3} + \frac{c}{(u+1)^2} + \frac{d}{u+1}$$

En multipliant par $u-1$ et en évaluant en 1 on obtient $a=1/8$. En multipliant par $(u+1)^3$ et en évaluant en -1 on obtient $b=-1/2$. En multipliant par u et en faisant tendre u vers $+\infty$ on obtient $d=-1/8$. En évaluant en 0 on trouve $c=-1/4$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{(u-1)(u+1)^3} &= \frac{1}{8}\ell n|u-1| + \frac{1}{4(u+1)^2} + \frac{1}{4(u+1)} - \frac{1}{8}\ell n|u+1| \\ &= \frac{u+2}{4(u+1)^2} + \frac{1}{8}\ell n\left|\frac{u-1}{u+1}\right|, \end{aligned}$$

et

$$\int \frac{x\ \mathrm{d}x}{(x^2-1)(x^2+1)^3} = \frac{x^2+2}{8(x^2+1)^2} + \frac{1}{16}\ell n\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|.$$

3.10 Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles

3.10.1 Fonctions polynômiales en $\cos x$ et $\sin x$.

Le calcul de primitives de telles fonctions se ramène, par linéarité, à celui de primitives de la forme $\displaystyle\int \cos^n x \sin^m x \, \mathrm{d}x$.

— Si n (respectivement m) est impair, on fait le changement de variable $u = \sin x$ (respectivement $u = \cos x$).
On a alors $\displaystyle\int \cos^{2p+1} x \sin^m x \, \mathrm{d}x = \int (1-u^2)^p u^m \, \mathrm{d}u$.

— Si m et n sont pairs, on linéarise l'expression.

3.10.2 Fractions rationnelles en $\cos x$ et $\sin x$.

Ce sont les fonctions construites à partir de $\cos x$ et $\sin x$ et des constantes en utilisant les « quatre opérations » $+$, $-$, $\times$, $\div$. Autrement dit, ce sont les fractions rationnelles en deux variables $R(u,v)$ dans lesquelles on remplace u par $\cos x$ et v par $\sin x$. Pour calculer $\int R(\cos x, \sin x)\, dx$, il y a un changement de variable qui marche toujours : c'est $t = \tan(x/2)$ (pour $x \in]-\pi, \pi[$), soit $x = 2 \arctan t$. On a alors

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

et on est amené à calculer

$$\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

qui est une primitive d'une fraction rationnelle en t, pas très agréable en général. On a intérêt à rechercher si d'autres changements de variable plus économiques veulent bien marcher. Il y a un « truc »pour trouver ces changements de variables, connu sous le nom de ***règles de Bioche***. Soit $f : x \longmapsto R(\cos x, \sin x)$ la fonction à intégrer.

- Si l'élément $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariant quand on remplace x par $-x$, on fait le changement de variable $u = \cos x$.
- Si l'élément $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariant quand on remplace x par $\pi - x$, on fait le changement de variables $u = \sin x$.
- Si l'élément $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariant quand on remplace x par $\pi + x$, on fait le changement de variables $u = \tan x$.

Exemple. Soit à calculer une primitive de $f(x) = (1 + \sin x)\tan x$ pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. C'est une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$. Comme $f(\pi - x)(\pi - x) = -f(x)(-\mathrm{d}x) = f(x)\,\mathrm{d}x$, on pose $u = \sin x$. On a alors $\mathrm{d}u = \cos x \; dx$, et on a à calculer

$$\int \frac{u(1+u)}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = \int \left(\frac{1}{1-u} - 1\right)\mathrm{d}u = -u - \ell n\,|1-u|,$$

d'où $\int (1+\sin x)\tan x \; \mathrm{d}x = -\sin x - \ell n\,(1-\sin x)$. Par contre, avec $t = \tan(x/2)$, on aurait eu à calculer

$$\int \left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2t}{1-t^2}\,\frac{2\;\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{4t(1+t)}{(1+t^2)^2(1-t)}\,\mathrm{d}t.$$

Est-il besoin de comparer ?

3.10.3 Fractions rationnelles en e^x, $\cosh x$, $\sinh x$.

On pose $u = e^x$, ce qui fait $dx = du/u$, $\cosh x = \frac{1}{2}(u + 1/u)$ et $\sinh x = \frac{1}{2}(u - 1/u)$. On est alors ramené au calcul d'une primitive de fraction rationnelle en u.

3.10.4 Fractions rationnelles en x en $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+f}}$.

On veut calculer

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{1/m}\right)\,\mathrm{d}x.$$

On pose $u = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+f}}$, d'où l'on tire $x = (-b + fu^m)/(a - cu^m)$, et $\mathrm{d}x$ est égal à une fraction rationnelle en u fois $\mathrm{d}u$. On se retrouve à intégrer une fraction rationnelle en u.

Exemple. Calcul de $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x}$ sur $[1, +\infty[$ ou sur $]-\infty, -1[$.
On pose $u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ d'où l'on tire $x = \frac{1+u^2}{1-u^2}$ et $\mathrm{d}x = \frac{4u}{(1-u^2)^2}\,\mathrm{d}u$. On est amené à calculer

$$\begin{aligned}\int u\,\frac{1-u^2}{1+u^2}\,\frac{4u}{(1-u^2)^2}\,\mathrm{d}u &= \int \frac{4u^2}{(1+u^2)(1-u^2)}\,\mathrm{d}u = \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{1-u^2} - \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}\\ &= \ell n\left|\frac{1+u}{1-u}\right| - 2\arctan u,\end{aligned}$$

donc

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x} = \ell n\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right| - 2\arctan\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \ell n\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| - 2\arctan\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

3.10.5 Fractions rationnelles en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

On fait un changement de variable $x = \lambda t + \mu$ pour se ramener à un radical d'une des formes

- $\sqrt{1+t^2}$, auquel cas on peut poser $t = \sinh u$,
- $\sqrt{t^2-1}$, auquel cas on peut poser $t = \cosh u$,
- $\sqrt{1-t^2}$, auquel cas on peut poser $t = \cos u$ ou $t = \sin u$.

(L'objectif est, dans chaque cas, de mettre l'expression sous le radical sous la forme d'un carré.) Dans les trois cas, on se ramène à des primitives déjà traitées. Voici un exemple, où le deuxième changement de variable est inutile.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-(x-1)^2}}.$$

On pose $t = (x-1)/\sqrt{2}$, alors $\mathrm{d}x = \sqrt{2}\,\mathrm{d}t$. On se ramène à

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t,$$

et donc

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} \qquad \text{pour } 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}.$$

3.11 Compléments

3.11.1 Intégrale de Riemann et fonction en escalier

Théorème 3.34 (Autre critère d'intégrabilité)**.** *Une fonction f, bornée sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann si et seulement si à tout $\varepsilon > O$, on peut associer deux fonctions en escalier φ et ψ vérifiant : $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\int_a^b (\psi - \varphi)(x)\,dx < \varepsilon$.*

Démonstration : Supposons tout d'abord f Riemann-intégrable.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit alors une subdivision X de $[a,b]$ telle que $S(f,X) - s(f,X) < \epsilon$. On définit les fonctions en escalier sur $[a,b]$ φ et ψ égales respectivement à $\inf\{f(x),\, x \in [a_{i-1}, a_i[\}$ et $\sup\{f(x),\, x \in [a_{i-1}, a_i[\}$ sur $[a_{i-1}, a_i[$ pour $i \in \{1, \cdots n\}$ et $\psi(b) = \varphi(b) = f(b)$. Par construction, on a bien $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\int_a^b \varphi(t)\,dt = s(f,X)$ et $\int_a^b \psi(t)\,dt = S(f,X)$. Finalement $\int_a^b (\psi - \varphi)(t)\,dt = S(f,X) - s(f,X) < \varepsilon$.
Soit $\varepsilon > 0$. Supposons réciproquement qu'il existe deux fonctions en escalier φ et ψ vérifiant $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\int_a^b (\psi - \varphi)(x)\,dx < \varepsilon$. Soit $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$ avec $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à la fois à φ et à ψ. Soit $i \in \{1, \cdots n\}$. Pour tout x de $[a_{i-1}, a_i[$, on a $\varphi(x) = \lambda_i \leqslant \inf\{f(x);\ x \in [a_{i-1}, a_i[\} \leqslant \sup\{f(x);\ x \in [a_{i-1}, a_i[\} \leqslant \psi(x) = \mu_i$ et par suite $S(f,X) - s(f,X) < \epsilon$. □

3.11.2 Exemple de fonction bornée non Riemann-intégrable sur $[a,b]$

Définissons la fonction de Dirichlet sur l'intervalle $[a,b]$ par $D(x) = 1$ si x est rationnel et $D(x) = 0$ si x est irrationnel. Soit φ une fonction en escalier inférieure à D sur $[a,b]$, associée à une subdivision $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$. Pour tout i, l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ contient un irrationnel (propriété de densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) x pour lequel $\varphi(x) = \lambda_i \leqslant D(x) = 0$ donc $\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant 0$. De même, si ψ est une fonction en escalier supérieure à D sur $[a,b]$, associée à une subdivision $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ alors pour tout i, l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ contient un rationnel x pour lequel $\psi(x) = \mu_i \geqslant D(x) = 1$ donc $\int_a^b \psi(x)\,dx \geqslant b - a$. Par suite, $\int_a^b (\psi - \varphi) \geqslant b - a$ et la fonction D n'est donc pas intégrable au sens de Riemann.

3.11.3 Exemple de fonction non continue par morceaux et Riemann-intégrable

C'est le cas de la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Soit en effet $\varepsilon > 0$. $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ est continue donc intégrable sur $[\frac{\varepsilon}{4}, 1]$ et il existe donc des fonctions en escalier φ et ψ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ sur $[\frac{\varepsilon}{4}, 1]$ et $\int_{\frac{\varepsilon}{4}}^1 (\psi(t) - \varphi(t))\,dt < \frac{\varepsilon}{2}$. Considérons alors les fonctions en escalier φ_1 et ψ_1 définies par $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ si $x \in [\frac{\varepsilon}{4}, 1]$ et $\varphi_1(x) = -1$ sinon, ainsi que $\psi_1(x) = \psi(x)$ si $x \in [\frac{\varepsilon}{4}, 1]$ et $\psi_1(x) = 1$ sinon. Il est clair que l'on a $\varphi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1$ sur $[0,1]$ et d'autre part,

$$\int_0^1 (\psi_1(t) - \varphi_1(t))\,dt = \int_0^{\frac{\varepsilon}{4}} (\psi_1(t) - \varphi_1(t))\,dt + \int_{\frac{\varepsilon}{4}}^1 (\psi(t) - \varphi(t))\,dt < 2\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Par suite f est bien intégrable.
Il est cependant clair que f n'est pas continue par morceaux (f n'a pas de limite à droite en 0).