Chapitre 2

Séries numériques

2.1 Rappels sur les suites numériques

Dans cette section, les principaux résultats sur les suites sont rappelés. Vous en trouverez les démonstrations dans votre cours de Licence 1 ou dans le livre de Jean-Pierre Escofier « Toute l'analyse de la licence ».

Définition 2.1. *Une **suite réelle** (ou complexe) est une famille de réels indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. La suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ($u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) est notée $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
*On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** s'il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$.*
*On dit que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.*
*On dit que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant M$.*
*La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.*
*La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.*
*Une suite rélle est dite **monotone** si elle est croissante ou décroissante.*

2.1.1 Convergence

Définition 2.2. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **convergente** s'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$, tel que*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Propriétés.

1. Si un tel réel ℓ existe, alors il est unique et appelé limite de la suite. On note alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
2. Tout suite convergente est bornée.
3. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes est convergente si et seulement si la suite des parties réelles $(Re(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite des parties imaginaires $(Im(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. En cas de convergence, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} Re(u_n) + i \lim\limits_{n\to+\infty} Im(u_n)$.

Théorème 2.3. *Toute suite réelle monotone et bornée est convergente.*

Définition 2.4. *On dit que deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.*

Théorème 2.5. *Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent et ont de plus la même limite.*

2.1.2 Suites extraites

Définition 2.6. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite extraite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou une **sous-suite**) s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$.*

Propriété. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples. $\varphi : n \mapsto 2n$ donne la suite des termes d'indices pairs, $\varphi : n \mapsto 2n+1$ donne la suite des termes d'indices impairs.

Proposition 2.7. *Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et de même limite.*

Remarque. En conséquence, si on peut extraire deux suites convergentes de limites distinctes d'une suite alors la suite diverge. Par exemple la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
De même, si on peut extraire une sous-suite divergente d'une suite, alors la suite diverge.

Proposition 2.8. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite avec $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers la même limite ℓ. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*

Théorème 2.9 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.** *De toute suite bornée de réels (ou de complexes), on peut extraire une suite convergente.*

2.1.3 Comparaison des suites

Les outils de comparaison introduits pour les fonctions s'utilisent aussi pour les suites.

Définition 2.10 (Domination)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe $M > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geqslant n_0, |u_n| \leqslant M|v_n|$.*
On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.

La notation O est fréquemment utilisée pour évaluer la complexité d'un algorithme.

Considérons par exemple le problème du tri : ranger par ordre croissant une liste de n nombres. Combien faut-il faire de comparaisons entre nombres ? Ceci dépend de l'algorithme de tri utilisé.

• L'algorithme récursif : si on a trié i nombres, on compare le $(i+1)$-ème à ceux déjà triés pour le ranger à la bonne place. On peut avoir à faire (dans le plus mauvais cas) $1+2+3+\cdots+(n-1) = (n-1)n/2$ comparaisons, ce qui fait $O(n^2)$ comparaisons.

• L'algorithme de « tri-fusion » : on fusionne deux listes déjà triées en comparant les premiers éléments des deux listes, prenant le plus petit et recommençant ; on fait ainsi des listes triées de 2, puis de 4, puis de 8.... Le nombre de comparaisons à faire pour fusionner deux listes triées de 2^{i-1} nombres est au plus $2^i - 1$. Si $2^{k-1} < n \leqslant 2^k$, il y a 2^{k-i} listes de 2^i nombres ou moins. Le nombre de comparaisons à faire pour trier n nombres par l'algorithme de tri-fusion est donc majoré par

$$1 \cdot 2^{k-1} + 3 \cdot 2^{k-2} + \cdots + (2^i - 1)2^{k-i} + \cdots + (2^k - 1)\cdots 1 \leqslant k\,2^k \leqslant (1 + \log_2 n)\,2n\ .$$

Ceci fait $O(n \ln n)$ comparaisons (vérifier), et c'est négligeable devant n^2.

Définition 2.11 (Négligeabilité)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable par rapport à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite ε avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n\varepsilon(n)$. Lorsque, à partir d'un certain rang, les v_n sont non nuls, cela revient à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$. On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.*

Définition 2.12 (Équivalence)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si $u_n - v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ i.e. il existe une suite ε avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n(1+\varepsilon(n))$. Lorsque, à partir d'un certain rang, les v_n sont non nuls, cela revient à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.*

Propriétés.

1. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} h_n$, alors $u_n w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n h_n$ et $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$. Attention : on n'a pas nécessairement $u_n + w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n + h_n$.
2. Si $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ et $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$ alors $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$.
3. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$ alors $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$.
4. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$, alors $u_n + w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.
5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $\ell \neq 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

   Montrons par exemple le point 4. Par hypothèses, on peut écrire $u_n = v_n\varphi_n$ et $v_n = w_n\varepsilon_n$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Mais alors $u_n + w_n = w_n(\varepsilon_n\varphi_n + 1)$ avec $\lim\limits_{n\to\infty}(\varepsilon_n\varphi_n + 1) = 1$. On a donc bien $u_n + w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.

Les comparaisons de suites viennent souvent de comparaisons de fonctions quand x tend vers $+\infty$. Par exemple si (u_n) et (v_n) sont définies respectivement par $u_n = f(n)$ et $v_n = g(n)$, et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Exercice. Comparer les suites $(n\,\ell n\, n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples.

1. $n^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}(n^\beta)$ quand $\alpha < \beta$.
2. $(\ell n\ n)^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}(n^\beta)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$.
3. $n^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}((\ell n\ n)^\beta)$ quand $\alpha < 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$;
4. $n^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}(k^n)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k > 1$. En effet, $\frac{n^\alpha}{k^n} = n^\alpha e^{-n\ell n\ k}$, avec $\ell n\ k > 0$.
5. $k^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$ pour $k > 0$.

   La propriété est triviale pour $k \in]0,1]$ car alors la suite $(k^n)_{n\geqslant 1}$ est bornée. Soit k fixé, on a, pour $n > [2k]$, (où $[.]$ désigne la fonction partie entière),

   $$\frac{k^n}{n!} = \frac{k}{1} \times \frac{k}{2} \times \cdots \times \frac{k}{n} = \frac{k^{[2k]}}{[2k]!} \times \frac{k}{[2k]+1} \times \frac{k}{[2k]+2} \times \cdots \times \frac{k}{n}$$

   Pour $p \geqslant [2k]+1$, on a $\frac{k}{p} \leqslant \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$. Donc, pour $n > [2k]$, on a

   $$0 \leqslant \frac{k^n}{n!} \leqslant \frac{k^{[2k]}}{[2k!]} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-[2k]}$$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-[2k]} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k^n}{n!} = 0$ (théorème des gendarmes).
6. $n! = \underset{n\to+\infty}{o}(n^n)$.

On remarque que, pour $n \geqslant 2$, on a $n \geqslant \frac{n}{2}$. Donc :

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \frac{n!}{n^n} &= \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \cdots \times \frac{n}{n} \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \cdots \times \frac{[n/2]}{n} \times \frac{[n/2]+1}{n} \times \cdots \times \frac{n}{n} \\
&\leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times 1 \times \cdots \times 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{[n/2]}
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\frac{n}{2}\right] = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Exercice. Montrons que la suite $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminons sa limite.

- Première erreur à éviter : on a $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1$ et donc

$$(1+\frac{1}{n})^n = (1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.1.\cdots.1 = 1.$$

  Ce raisonnement est faux car derrière les trois petits points se cache un produit dont le nombre de facteurs est n et donc un produit qui devient infini. Le théorème sur le produit des limites ne s'étend pas sans précaution à un produit infini...
- Deuxième erreur à éviter : $(1+\frac{1}{n}) > 1$ et, pour $q > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$ (limite d'une suite géométrique), et donc $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = +\infty$. Ce raisonnement est faux car sous-entend $q = 1+\frac{1}{n}$ mais q n'est alors pas constant et la suite n'est donc pas géométrique...
- Enfin une bonne méthode : posons $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$. On a $\ell n\,(u_n) = n\ell n\,(1+\frac{1}{n})$ et $\ell n\,(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\ell n\,(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} n.\frac{1}{n}$. On en déduit $\lim\limits_{n\to\infty} \ell n\,(u_n) = 1$ et donc, par composition de limites, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \exp(1) = e$.

2.2 Séries

2.2.1 Définitions et convergence

Définition 2.13. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle (ou complexe). On appelle **série** de terme général u_n, notée $\sum u_n$, la suite des **sommes partielles** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On parle de série de nombres réels si tous les u_n sont réels.

*On dit que la série **converge** si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Sinon, on dit que la série **diverge**.*

*En cas de convergence, la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **somme** de la série et est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

Remarque. Parfois la série ne commence pas à 0 mais au rang $n_0 \in \mathbb{N}$. Les sommes partielles sont alors définies pour $n \geqslant n_0$ par $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$. La nature (convergente ou divergente) de la série ne dépend pas des premiers termes, mais la valeur de la somme de la série en dépend.

Proposition 2.14. *Une série complexe* $\sum u_n$ *converge si et seulement si les séries des parties réelles* $\sum Re(u_n)$ *et des parties imaginaires* $\sum Im(u_n)$ *convergent.*
En cas de convergence, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} Re(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} Im(u_n)$$

Démonstration : En effet, la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ des sommes partielles de $\sum u_n$ vérifie, par linéarité,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} Re(u_k) + i \sum_{k=0}^{n} Im(u_k).$$

□

Exemples.

1. Soit $a \in \mathbb{C}$ et on considère la suite constante $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a$. Alors $S_n = (n+1)a$. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a = 0$.
2. ***Série géométrique***. Soit $q \in \mathbb{C}$. On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = q^n$. On a alors $S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n$.
   (a) Si $q = 1$, on a $S_n = n + 1$, donc la série diverge.
   (b) Si $q \neq 1$, on remarque que $(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$ et donc $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

   Conclusion : $\boxed{\text{La série géométrique } \sum q^n \text{ converge si et seulement si } |q| < 1}$

   et dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$. Par exemple, pour $q = \dfrac{1}{2}$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 2$.

Remarque. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si |q|<1, on a $\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \dfrac{q^{n_0}}{1-q}$.
Cet exemple confirme le fait que les premiers termes d'une série ont une influence sur la valeur de la somme.

Définition 2.15. *On appelle **reste d'ordre** n d'une série convergente* $\sum u_n$ *vers* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *la quantité* $R_n = S - S_n$.

Remarque. Si R_n est le reste d'ordre n de la série convergente $\sum u_n$, alors $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

En effet,

$$R_n = S - S_n = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_{p\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{p} u_k \right) - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Remarque. La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers 0. Elle représente la vitesse de convergence de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ vers S.
Par exemple, dans le cas d'une série géométrique $\sum q^n$ avec $|q| < 1$, on a :

$$R_n = \frac{1}{q-1} - \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Proposition 2.16. *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors $\sum(u_n + v_n)$ et $\sum \lambda u_n$ convergent et on a*

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n + \sum_{k=0}^{+\infty} v_n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_n$$

Attention ! La réciproque est fausse ! Si $\sum(u_n+v_n)$ converge, on n'a pas forcément convergence de $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Par exemple, pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$ et $v_n = 1$. On a $\sum(u_n + v_n)$ converge et $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent.

Proposition 2.17 (Condition nécessaire de convergence)**.** *Si $\sum u_n$ est une série convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

Démonstration : On remarque que pour $n \geqslant 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$. Comme $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{n-1})_{n\geqslant 1}$ convergent vers la même limite, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. □

Définition 2.18. *Une série $\sum u_n$ est dite **grossièrement divergente** lorsque son terme général ne tend pas vers 0.*

2.2.2 Exemples de séries

Les séries de Riemann

• On appelle ***série harmonique*** la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$. Cette série diverge.
En effet, bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait, on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} - S_n = 0$. Par conséquent, $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

• D'une manière générale, on appelle ***série de Riemann*** toute série de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration : • La divergence de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha \leqslant 1$ résultera de manière immédiate du théorème de comparaison (puisque la série harmonique diverge). • Soit alors $\alpha > 1$. Montrons que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge en montrant la convergence de la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a déjà $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} > 0$ donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Montrons que cette suite est majorée. Soit $k \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. $f : x \mapsto \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ est continue sur $[k-1, k]$ et dérivable sur $]k-1, k[$ donc (théorème des accroissements finis) :
$\exists c \in]k-1, k[$, $f(k) - f(k-1) = (k-(k-1))f'(c)$ c'est à dire $\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} = -(\alpha-1)\frac{1}{c^\alpha}$.
Comme $c \in]k-1, k[$, $\frac{1}{c^\alpha} > \frac{1}{k^\alpha}$ et donc $\frac{1}{k^\alpha} < \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right)$. En sommant ces inégalités, pour k allant de 2 à n,

$$S_n < 1+\frac{1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{\alpha-1}} - \frac{1}{3^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) = 1+\frac{1}{\alpha-1}(1-\frac{1}{n^{\alpha-1}}) < 1+\frac{1}{\alpha-1}$$

En conclusion, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc converge. □

Les séries télescopiques

Définition 2.19. *Une série réelle ou complexe* $\sum u_n$ *est dite* ***télescopique*** *s'il existe une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $u_n = a_n - a_{n-1}$ *pour* $n \geqslant 1$.

Soit $\sum u_n$ une série télescopique, avec $u_n = a_n - a_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$. Les sommes partielles vérifient donc

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 + a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + ... + a_n - a_{n-1} = u_0 - a_0 + a_n.$$

Par conséquent, la série $\sum u_n$ et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature. En cas de convergence, le reste d'ordre n vérifie $R_n = \lim\limits_{k\to+\infty} a_k - a_n$. La série et la suite ont par conséquent, la même vitesse de convergence.

Exemple. On considère $u_n = \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{-1}{n} + \dfrac{1}{n-1}$. On a alors $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} u_k = 1 - \dfrac{1}{n}$. La série $\sum \dfrac{1}{n(n-1)}$ est donc convergente et on a $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n-1)} = 1$.

2.3 Séries à termes positifs

On considère dans cette section des séries $\sum u_n$ réelles où pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. On dit que la série est à termes positifs (ATP). Il est alors immédiat que la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante. En conséquence,

Proposition 2.20. *La série à termes positifs* $\sum u_n$ *converge si et seulement si la suite* $(S_n)_{n\geqslant 0}$ *est majorée.*

En cas de convergence, on a alors pour tout n de $\mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

En cas de divergence, on a alors $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

2.3.1 Théorèmes de comparaison

Théorème 2.21. *Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs. telles que, pour tout* n *de* $\mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

- *Si* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge et* $0 \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$
- *Si* $\sum u_n$ *diverge, alors* $\sum v_n$ *diverge.*

Le théorème reste vrai s'il existe un rang n_0 *tel que pour* $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$. *En cas de convergence, on a alors*

$$0 \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$$

Démonstration : On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$. On remarque que pour tout $n \geqslant 0$, on a $S_n \leqslant T_n$.

Si $\sum v_n$ converge, alors la suite $(T_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée et donc $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée, donc $\sum u_n$ converge. Le deuxième point du théorème en résulte alors aussi puisqu'il n'est autre que la contraposée du premier. □

Théorème 2.22 (Théorème d'équivalence)**.** *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, avec $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Démonstration : Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, on peut écrire $u_n = v_n\varphi_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n = 1$.
On en déduit (choix de $\varepsilon = \frac{1}{2}$) l'existence d'un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $1 - \dfrac{1}{2} \leqslant \varphi_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{2}$. En multipliant par $v_n \geqslant 0$, il vient $\dfrac{1}{2}v_n \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3}{2}v_n$. D'après le théorème précédent, ceci implique que les deux séries sont de même nature. □

Exemple.

1. La série télescopique $\sum \dfrac{1}{n(n-1)}$ converge et $\dfrac{1}{n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ donc $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge.
2. Comme $\ell n\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, la série $\sum \ell n\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ converge.

Attention ! Si deux suites postives sont équivalentes, alors leurs séries sont de même nature. Cependant, en cas de convergence, on n'a aucune information sur la valeur des sommes.

Exercice. Montrer que la convergence d'une suite réelle (u_n) est équivalente à la convergence de la série de terme général $u_n - u_{n-1}$. En déduire que la suite définie, pour $n \geqslant 1$, par $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ell n\, n$ est convergente.

Théorème 2.23 (Critère de d'Alembert)**.** *Soit $\sum u_n$ une série **à termes strictement positifs** ($u_n > 0$).*

1. S'il existe $q \in]0,1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$ alors la série $\sum u_n$ converge et pour tout $n \geqslant n_0$, on a $R_n \leqslant \frac{u_{n+1}}{1-q}$.

2. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Démonstration : 1. On a pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant qu_n$ (car $u_n \geqslant 0$). Par conséquent, pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant q^{n-n_0}u_{n_0}$ (récurrence immédiate). Comme $q \in]0,1[$, $\sum q^{n-n_0}$ converge, donc (théorème de comparaison) $\sum u_n$ converge. Par ailleurs, pour $n \geqslant n_0$ et $i \geqslant 0$, on a $u_{n+1+i} \leqslant q^i u_{n+1}$. En utilisant le changement d'indice $i = k - (n+1)$,
$R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} u_{n+1+i} \leqslant u_{n+1}\sum\limits_{i=0}^{+\infty} q^i$ et donc pour $n \geqslant n_0$, $R_n \leqslant u_{n+1}\dfrac{1}{1-q}$.

2. Pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant u_{n_0}$, donc la suite ne peut pas converger vers 0 et la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement). □

Conséquence. (Règle de d'Alembert) Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs à partir d'un certain rang telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

1. Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Démonstration : 1. Si $\ell < 1$. On choisit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell + \varepsilon < 1$. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$ i.e. $\ell - \varepsilon \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell + \varepsilon < 1$. D'après le critère de d'Alembert (avec $q = \ell + \varepsilon$), la série $\sum u_n$ converge.

2. Si $\ell > 1$, On choisit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell - \varepsilon > 1$. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$ i.e. $1 < \ell - \varepsilon \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell + \varepsilon$. D'après le critère de d'Alembert (avec $q = \ell - \varepsilon$), la série $\sum u_n$ diverge. □

Exemple. Soit $x > 0$. On considère la série $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{x^n}{n}$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{nx}{n+1}$. D'après la règle de d'Alembert, la série est convergente si $x < 1$, divergente si $x > 1$, mais on ne peut pas conclure avec la règle si $x = 1$. Cependant, on sait déjà que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Remarque. La règle de d'Alembert ne dit rien lorsque $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'a pas de limite ni même lorsque cette quantité tend vers 1. Par exemple, $\sum u_n$ diverge lorsque $u_n = \frac{1}{n}$ et converge lorsque $u_n = \frac{1}{n^2}$ et dans les deux cas $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Théorème 2.24 (Règle de Riemann)**.** *Soit $\sum u_n$ une série réelle (positive).*

1. *S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \ell \in \mathbb{R}$ alors la série $\sum u_n$ converge.*
2. *S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \ell \neq 0$ alors la série $\sum u_n$ diverge.*

Démonstration : 1. Si $\ell \neq 0$ c'est immédiat puisqu'alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{n^\alpha}$ (et donc, au passage, u_n a, à partir d'un certain rang, un signe constant : celui de ℓ). Si $\ell = 0$, par définition on peut considérer un entier n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $|n^\alpha u_n| \leqslant 1$ soit $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$. D'après le théorème de comparaison, la série $\sum u_n$ converge.

2. C'est immédiat puisqu'encore une fois $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{n^\alpha}$. □

Remarque. La convergence absolue entraînant la convergence (voir paragraphe suivant), l'hypothèse de positivité de ce dernier critère est superflue...

2.4 Autres séries - Convergence absolue

2.4.1 Les séries alternées

On parle de série alternée lorsque le terme général est un réel alternativement de signe positif et de signe négatif. Plus précisément,

Définition 2.25. *La série réelle $\sum u_n$ est dite alternée si $(-1)^n u_n$ a un signe indépendant de n.*

Exemples. $\sum (-1)^n$ et $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ sont des séries alternées.

Théorème 2.26 (Critère spécial à certaines séries alternées)**.** *Soit $\sum u_n$ une série alternée. Si la suite $(|u_n|)$ est décroissante et converge vers 0 alors la série $\sum u_n$ est convergente.*

Démonstration : Supposons par exemple que $(-1)^n u_n$ est toujours positif. Soit alors $n \geqslant 2$. $S_n - S_{n-2} = u_{n-1} + u_n = (-1)^{n-1}|u_{n-1}| + (-1)^n |u_n| = (-1)^n(|u_n| - |u_{n-1}|)$ avec $|u_n| - |u_{n-1}| \leqslant 0$.

— Pour n pair ($n = 2p$), $S_{2p} - S_{2p-2} \leqslant 0$ donc la suite $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
— Pour n impair ($n = 2p+1$), $S_{2p+1} - S_{2p-1} \geqslant 0$ donc la suite $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante.
— $S_{2p+1} - S_{2p} = u_{2p+1}$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

Les deux suites $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes. Elles convergent en conséquence vers la même limite S. On en déduit, d'après 1.8, que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers S. □

Exemple. La série harmonique alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

Propriétés.

— La somme S d'une série alternée <u>vérifiant le critère précédent</u> est comprise entre deux sommes partielles consécutives.

— Le reste d'ordre n d'une série alternée vérifiant le critère précédent a le signe de son premier terme et est, en valeur absolue, majoré par la valeur absolue de son premier terme.

Démonstration : Le premier point résulte de la démonstration précédente (suites adjacentes) : $S_{2p+1} \leqslant S \leqslant S_{2p}$. Pour le deuxième, on écrit ces inégalités sous la forme $S_{2p+1} \leqslant S_{2p}+R_{2p} \leqslant S_{2p}$ d'où l'on déduit par exemple $u_{2p+1} \leqslant R_{2p} \leqslant 0$ et $|R_{2p}| = -R_{2p} \leqslant -u_{2p+1} = |u_{2p+1}|$. □

Exemple. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$.

Remarque. Lorsqu'une série alternée ne vérifie pas les hypothèses du théorème précédent, on peut essayer de décomposer le terme général en une somme de deux termes, l'un vérifiant ces hypothèses, l'autre restant à étudier.

2.4.2 Séries absolument convergentes

Définition 2.27. *Une série réelle ou complexe $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série réelle $\sum |u_n|$ converge, où $|.|$ représente le module.*

Proposition 2.28. *Toute série absolument convergente est convergente. En cas de convergence, on a*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Démonstration : • Supposons pour commencer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ soit à valeurs réelles. Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$, où $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ (le vérifier en distinguant les cas $u_n \geqslant 0$ et $u_n \leqslant 0$). De plus,

$$0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|.$$

Comme $\sum |u_n|$ converge, par le théorème de comparaison 1.3.1, on déduit que $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.

Par ailleurs $u_n = u_n^+ - u_n^-$ (le vérifier en distinguant les cas $u_n \geqslant 0$ et $u_n \leqslant 0$) et donc la série $\sum u_n$ converge.

• Si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est à valeurs complexes, on introduit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ les suites des parties réelles et des parties imaginaires de $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Comme,

$$0 \leqslant |a_n| \leqslant |u_n| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant |b_n| \leqslant |u_n|,$$

la convergence de $\sum |u_n|$ entraîne celle de $\sum |a_n|$ et de $\sum |b_n|$. Du cas réel, on déduit que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, et donc $\sum u_n$ converge.

• En cas de convergence, on $\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|$ (inégalité triangulaire) et chacune de ces deux quantités a une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$. La fonction valeur absolue étant continue, on a donc à la limite $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. □

Remarque. La réciproque est fausse (voir exemples). Une série convergente mais non absolument convergente est parfois dite ***semi-convergente***.

Proposition 2.29. *Soit $\sum u_n$ une série réelle ou complexe. Soit $\sum v_n$ une série absolument convergente. Si $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ (a fortiori si $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$) alors $\sum u_n$ est absolument convergente.*

Démonstration : Comme $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$, il existe $M > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant M\,|v_n|$. Il suffit alors d'utiliser le théorème de comparaison 1.3.1 pour en déduire que $\sum u_n$ est absolument convergente. $\square$

Exemples. 1. La série $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$ est absolument convergente car $\frac{\sin(n)}{n^2} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.

2. La série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, mais la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge. La série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.

3. Soit $x \in \mathbb{C}$. On considère la série $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{x^n}{n!}$. Pour $x \neq 0$, on remarque que $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|x|}{n+1}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{C}$.

Proposition 2.30. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est absolument convergente.*

Exercice. Démontrer cette proposition.

2.5 Représentation décimale des réels

Définition 2.31. *On appelle **développement décimal** d'un réel x toute suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers vérifiant :*

$$d_0 \in \mathbb{Z}, \qquad \forall n \geqslant 1 \quad d_n \in [\![0, 9]\!] \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n} = x$$

On note alors $x = d_0, d_1 d_2 \cdots d_n \cdots$.
*On appelle **développement décimal propre** d'un réel x tout développement décimal ne comportant pas que des 9 à partir d'un certain rang. Le développement est dit impropre dans le cas contraire.*

Théorème 2.32.
Tout réel non décimal admet un unique développement décimal et ce développement est propre. Tout nombre décimal non nul admet deux développement décimaux distincts, l'un propre et l'autre impropre.

Démonstration : On note E la fonction partie entière. Soit x un réel.
• **Existence :** On pose $a_0 = d_0 = E(x)$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$a_n = E(10^n x) \qquad x_n = \frac{a_n}{10^n} \qquad y_n = x_n + \frac{1}{10^n} \qquad \text{et} \qquad d_n = (x_n - x_{n-1}).10^n = a_n - 10a_{n-1}$$

On dit que x_n est ***l'approximation décimale par défaut*** de x à 10^{-n} près.
• Montrons que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, de limite commune x.
Il est déjà clair que $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n - x_n) = 0$ puisque, pour tout entier $n \geqslant 1$, $y_n - x_n = \dfrac{1}{10^n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $E(10^n x) \leqslant 10^n x < E(10^n x) + 1$ donc $10a_n \leqslant 10^{n+1}x < 10a_n + 10$. Puisque a_n est entier, par définition de la partie entière, $10a_n \leqslant E(10^{n+1}x) < 10a_n + 10$. En divisant par 10^{n+1} la première inégalité, il vient alors : $x_n \leqslant x_{n+1}$: la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
D'autre part, $E(10^{n+1}x) < 10a_n + 10$ entraîne $E(10^{n+1}x) \leqslant 10a_n + 9$ et donc, en divisant par 10^{n+1}, $x_{n+1} \leqslant x_n + \dfrac{9}{10^{n+1}}$. En ajoutant $\dfrac{1}{10^{n+1}}$, il vient $y_{n+1} \leqslant x_n + 10^{-n} = y_n$: la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Enfin, $E(10^n x) \leqslant 10^n x < E(10^n x) + 1$ entraîne $x_n \leqslant x < y_n$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x$.
• Montrons que $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$. Il s'agit d'une série téléscopique. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0$

et donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k} = x_n$. Le résultat en découle.

• Montrons que $\forall n \geqslant 1 \quad d_n \in [\![0, 9]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $10a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant 10a_n + 9$ donc $0 \leqslant a_{n+1} - 10a_n = d_{n+1} \leqslant 9$. Enfin, d_0 est entier et, pour $n \geqslant 1$, $d_n = a_n - 10a_{n-1}$ l'est aussi.

• Montrons que, lorsque x n'est pas décimal, tout développement décimal de x est propre. Supposons par l'absurde que tous les d_k sont égaux à 9 à partir du rang m. On a alors $x = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{d_n}{10^n} + \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{d_n}{10^n} + \frac{9}{10^m}.\frac{1}{1-\frac{1}{10}}$ et donc $x = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{d_n}{10^n} + \frac{1}{10^{m-1}}$ est décimal, ce qui est exclu.

• **Unicité :** Soit x un réel admettant deux développements décimaux distincts $x = d_0, d_1 d_2...$ et $x = d'_0, d'_1 d'_2...$ où les suites (d_n) et (d'_n) sont distinctes, telles que d_0 et d'_0 soient entiers relatifs et d_n et d'_n soient éléments de $[\![0, 9]\!]$ pour $n \geqslant 1$. Posons $x'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{d'_k}{10^k}$.
Soit $m = \text{Min}\{n \in \mathbb{N},\ d'_n \neq d_n\}$. Supposons par exemple que $d'_m < d_m$.

• Montrons que $d_m - d'_m = 1$.

Pour $n > m$, on a, avec les notations précédentes, $x_n - x'_n = \frac{d_m - d'_m}{10^m} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{d_k - d'_k}{10^k}$.

Mais les suites (x_n) et (x'_n) convergent vers x. Donc $\lim_{n \to +\infty} (x_n - x'_n) = 0$ et donc :
$\frac{1}{10^m} \leqslant \frac{d_m - d'_m}{10^m} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{d'_k - d_k}{10^k}$ (car $d_m - d'_m \geqslant 1$). Mais d'autre part,

$$\sum_{k=m+1}^{n} \frac{d'_k - d_k}{10^k} \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10^{m+1}}.\frac{1 - \frac{1}{10^{n-m}}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10^m} - \frac{1}{10^n} < \frac{1}{10^m}$$

et donc, $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{d'_k - d_k}{10^k} \leqslant \frac{1}{10^m}$. Finalement, $\frac{d_m - d'_m}{10^m} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{d'_k - d_k}{10^k} = \frac{1}{10^m}$.
Donc $d_m - d'_m = 1$ (c'est-à-dire que, à la première décimale qui diffère, il y a 1 d'écart entre les deux décimales).

• Montrons que : $\forall n \geqslant m + 1,\ d'_n = 9$ et $d_n = 0$.

Pour tout $n \geqslant m + 1$ on a $d'_n - d_n \leqslant 9$ et $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{d'_k - d_k}{10^k} = \frac{1}{10^m} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{9}{10^k}$
donc, pour $n \geqslant m + 1$, $d'_n - d_n = 9$ et donc $d_n = 0$ (et en particulier x est nécessairement décimal) et $d'_n = 9$.

• Concluons. Si x n'est pas décimal, on ne peut avoir $\forall n \geqslant m + 1,\ d_n = 0$ et on a donc montré par l'absurde l'unicité du développement décimal de x.
Enfin, si x est décimal, le point précédent montre que x admet au plus deux développements décimaux. Or, x étant décimal (non nul), il admet une écriture de la forme $x = \sum_{k=0}^{m} \frac{d_k}{10^k}$ où d_m est non nul mais, puisque $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^m}$, on a aussi $x = d_0, d_1 \cdots d_{m-1}(d_m - 1)999 \cdots$.

□

Exercice. Montrer qu'un réel x est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.

2.6 Complément : exemples de calcul de la somme d'une série convergente

Les théorèmes des sections précédentes permettent de savoir si une série converge ou pas. Malheureusement, en cas de convergence, il est en général très difficile d'identifier la valeur de la somme. On va voir quelques exemples où la somme de la série est facilement identifiable.

2.6.1 Premier exemple

Considérons la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2-1}$, pour $n \geqslant 2$.
La série converge car $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge.

Soit $n \geqslant 2$. La décomposition en éléments simples donne $u_n = \dfrac{1}{2(n-1)} - \dfrac{1}{2(n+1)}$. Il ne s'agit pas exactement d'une série télescopique. Cependant, on remarque que,

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1}\right)$$

Utilisons les changements d'indice $i = k-1$ dans la première somme et $j = k+1$ dans la seconde somme, on a alors

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i} - \sum_{j=3}^{n+1}\frac{1}{j}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Il suffit maintenant de faire tendre n vers $+\infty$ pour identifier la somme. On obtient donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}.$$

On a $\dfrac{1}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$, mais ceci ne donne aucune information sur la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. En fait, il est possible de montrer, par d'autres techniques, que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2.6.2 Deuxième exemple

Considérons la série de terme général $u_n = nq^n$, avec q un complexe de module $|q| < 1$.
On remarque que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n}q$. La suite $\left(\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $|q|$.
Comme $|q| < 1$, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum nq^n$ converge absolument.

On souhaite calculer la somme de cette série. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=0}^{N} nq^n = \sum_{n=1}^{N} nq^n = q\sum_{n=1}^{N} nq^{n-1} \\
&= q\sum_{n=1}^{N}(1+(n-1))q^{n-1} \\
&= q\left(\sum_{n=1}^{N} q^{n-1} + \sum_{n=1}^{N}(n-1)q^{n-1}\right) \\
&= q\left(\sum_{k=0}^{N-1} q^{k} + \sum_{k=0}^{N-1} kq^{k}\right) \text{ en utilisant le changement d'indice } k = n-1 \\
&= q\left(S_N - Nq^N + \sum_{k=0}^{N-1} q^k\right).
\end{aligned}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, il vient $S = q(S + \dfrac{1}{1-q})$ soit finalement $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$.