

Chapitre 1

Comparaison des fonctions - Développements limités

1.1 Comparaison locale des fonctions

On veut comparer des fonctions « quand x tend vers a ». Ici a pourra être un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$. Nous convenons ici que toutes les fonctions considérées sont définies au moins

- si $a \in \mathbb{R}$: sur un intervalle ouvert contenant a , sauf peut-être en a ;
- si $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$) : sur un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ (resp. $] - \infty, A[$).

On dit qu'une telle fonction f vérifie une propriété P **au voisinage de** $a \in \mathbb{R}$ lorsqu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que, pour tous les x de $I \cap D_f$, $f(x)$ vérifie P .

Dans le cas où $a = \pm\infty$, la définition est similaire avec un intervalle I de la forme $]M, +\infty[$ (resp. $] - \infty, M[$).

1.1.1 Fonctions équivalentes

Définition 1.1. Soit f et g deux fonctions. On dit que $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ quand x tend vers a quand il existe une fonction h telle que $f = gh$ et que $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1$. Si g ne s'annule pas

au voisinage de a , sauf peut-être en a , ceci revient à dire que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On note alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

On n'oubliera pas de toujours préciser en quel point les fonctions sont équivalentes, ou du moins de le garder toujours présent à l'esprit.

Voici quelques exemples d'équivalents classiques :

$$\begin{array}{lll} e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & ((1+x)^\alpha - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x \\ \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & \tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & (\cos x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2/2 \\ \sinh x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & \tanh x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x & (\cosh x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2/2 \end{array}$$

Exercice. Vérifier toutes ces équivalences à l'aide de la définition du nombre dérivé ou de la règle de l'Hospital. Comme illustration de la mise en garde sur la nécessité de préciser en quel point les équivalences ont lieu, vérifier également qu'aucune des équivalences ci-dessus n'a lieu quand x tend vers $+\infty$, sauf la troisième pour une seule valeur de α : préciser laquelle.

Voici quelques propriétés de l'équivalence.

Proposition 1.2. 1. L'équivalence de fonctions est une relation d'équivalence :

- $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$ (réflexivité)
- $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ entraîne $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$ (symétrie)
- $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$ entraînent $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$ (transitivité).

2. Si $f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_2(x)$, alors $(f_1 f_2)(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g_1 g_2)(x)$.
3. Si $f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_2(x)$, et si $g_2(x)$ ne s'annule pas au voisinage de a (sauf peut-être en a), alors $(f_1/f_2)(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g_1/g_2)(x)$.

Démonstration : Contentons nous ici de vérifier la troisième propriété. On suppose que $f_i(x) = h_i(x)g_i(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} h_i(x) = 1$, pour $i = 1, 2$. Si $g_2(x)$ ne s'annule pas au voisinage de a , alors $f_2(x) = h_2(x)g_2(x)$ non plus. On a $(f_1/f_2)(x) = (h_1/h_2)(x) \times (g_1/g_2)(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow a} (h_1/h_2)(x) = 1$. \square

Exercice. Vérifier les autres propriétés de la proposition.

Exercice. Montrer que si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ alors, pour tout n de \mathbb{N}^* , $f(x)^n \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)^n$.

Il faut **se méfier des sommes** : si on a $f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_2(x)$, on n'a pas forcément $(f_1 + f_2)(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g_1 + g_2)(x)$. Par exemple on a $-x^3 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x^3 + x$ et $x^3 + x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^3$, mais on n'a pas $x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x!!$

On ne peut pas non plus composer des équivalents. Par exemple, on a $x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x + 1$, mais e^x n'est pas équivalent à e^{x+1} quand x tend vers $+\infty$!

L'usage des équivalents (quand x tend vers a) permet de calculer certaines limites (en a). Par exemple, $x^2((1+x)^3 - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 \times 3x = 3x^3$ et $\sin x \cdot (1 - \cos x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \times \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2}$, et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2((1+x)^3 - 1)}{\sin x(1 - \cos x)} = 6.$$

Remarques.

- Deux fonctions équivalentes en a ont nécessairement le même signe sur un voisinage de a .
- Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \neq 0$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ell$.

1.1.2 Fonction négligeable devant une autre, dominée par une autre

Définition 1.3. On dit que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ quand x tend vers a s'il existe une fonction ϵ , telle que $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$ et que $f(x) = g(x)\epsilon(x)$ au voisinage de a . Si g ne s'annule pas au voisinage de a , sauf peut-être en a , ceci revient à dire que $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x)) = 0$. On note $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$ (on lit « $f(x)$ est un petit o de $g(x)$ »).

La notation $f(x) = o(g(x))$ est un **abus de notation** (si on a aussi $h(x) = o(g(x))$, ce n'est pas pour cela que $f(x) = h(x)$). Mais elle est employée couramment. Comme cette notation risque d'induire en erreur, on a intérêt en cas de doute à revenir à l'écriture $f(x) = g(x)\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$.

Donnons quelques exemples. • $x^m = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n)$ si et seulement si $m > n$.

- $x^m = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x^n)$ si et seulement si $m < n$.
- $\ln(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x^\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$.

Exercice. Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $f(x) - g(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$.

Définition 1.4. On dit que $f(x)$ est dominé par $g(x)$ quand x tend vers a quand il existe une constante réelle $K > 0$ telle que $|f(x)| \leq K|g(x)|$ au voisinage de a . On écrit $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(g(x))$ (on lit « $f(x)$ est un grand O de $g(x)$ »).

La notation $f(x) = O(g(x))$ est encore un abus.

Quelques exemples : $x \sin(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{O}(x)$; $2x^3 + 15x^2 = \underset{x \rightarrow 0}{O}(x^2)$ et $2x^3 + 15x^2 = \underset{x \rightarrow +\infty}{O}(x^3)$.

On a aussi : $f(x) = \underset{x \rightarrow a}{O}(1) \iff f$ est bornée au voisinage de a .

Exercice. Démontrer les propriétés suivantes (tout a lieu quand $x \rightarrow a$).

1. Si $f(x) = o(g(x))$, alors $f(x) = O(g(x))$.
2. Si $f(x) \sim g(x)$, alors $f(x) = O(g(x))$.
3. Si $f(x) = O(g(x))$ et $g(x) \sim h(x)$, alors $f(x) = O(h(x))$.
4. Si $f(x) = o(g(x))$ et $g(x) = O(h(x))$, alors $f(x) = o(h(x))$.
5. Si $f_1(x) = o(g(x))$ et $f_2(x) = o(g(x))$, alors $(f_1 + f_2)(x) = o(g(x))$.
6. Si $f_1(x) = o(g_1(x))$ et $f_2(x) = O(g_2(x))$, alors $(f_1 f_2)(x) = o(g_1 g_2)(x)$.

Une erreur à ne pas faire : si $f(x) = o(g_1(x))$ et $f(x) = o(g_2(x))$ quand $x \rightarrow a$, on ne peut pas en déduire que $f(x) = o((g_1 + g_2)(x))$ quand $x \rightarrow a$. Par exemple, prendre $f(x) = x^3$, $g_1(x) = x^2 + x^3$, $g_2(x) = -x^2$ quand $x \rightarrow 0$.

Les notations o et O sont appelées notations de Landau (Edmund Landau (1877–1938), mathématicien allemand)

1.2 Développement limités

1.2.1 Formule de Taylor avec reste de Young

Théorème 1.5. Soit a un nombre réel et $n \geq 1$ un entier. Soit f une fonction réelle définie et $n - 1$ fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a . On suppose que f a une dérivée n -ième $f^{(n)}(a)$ en a . Alors, pour $a + h \in I$, on a

$$f(a + h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} h + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + h^n \epsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0.$$

Ou encore,

$$\forall x \in I \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + (x - a)^n \epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0.$$

Le « reste » $h^n \epsilon(h)$ s'appelle reste de Young, et la formule du théorème est la *formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre n en a* . Avec la notation du petit o , le reste peut aussi s'écrire $o_{h \rightarrow 0}(h^n)$ ou $o_{x \rightarrow a}((x - a)^n)$. A l'ordre 1, la formule s'écrit

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\epsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0.$$

C'est simplement écrire que f a pour dérivée $f'(a)$ en a . La formule de Taylor avec reste de Young en a donne des renseignements sur le comportement de la fonction quand la variable tend vers a , comme la formule pour la dérivée en a qu'elle généralise.

Démonstration : Posons, pour $x \in I$,

$$g(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x - a)^{n-1}.$$

(g n'est autre que le polynôme de Taylor de f en a à l'ordre $(n - 1)$.)

On vérifie que $g(a) = f(a)$ et que $g^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pour $1 \leq k \leq n - 1$.

Fixons $x \in I \setminus \{a\}$ (que devient la formule pour $x = a$?) et posons, pour $t \in I$,

$$\Phi(t) = f(t) - g(t) - A(t - a)^n \quad \text{où } A \text{ est une constante (vis à vis de } t).$$

La fonction Φ est $n - 1$ fois dérivable sur I . On constate que $\Phi(a) = \Phi'(a) = \dots = \Phi^{(n-1)}(a) = 0$.

On choisit alors A en sorte que $\Phi(x) = 0$ ce qui revient alors à poser $A = \frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^n}$. D'après

le théorème de Rolle (Que dit ce théorème ? Quelles en sont les hypothèses ? Sont-elles vérifiées ici ?), il existe c_1 entre a et x tel que $\Phi'(c_1) = 0$. De nouveau d'après le théorème de Rolle, il existe c_2 entre a et c_1 tel que $\Phi''(c_2) = 0$. En continuant ainsi, on trouve c_{n-1} , entre a et x , tel que $\Phi^{(n-1)}(c_{n-1}) = 0$. Comme

$$\Phi^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a) - An!(t-a),$$

on obtient

$$\frac{f^{(n-1)}(c_{n-1}) - f^{(n-1)}(a)}{(c_{n-1} - a)} = An!.$$

Quand x tend vers a , c_{n-1} qui est coincé entre a et x tend vers a . Comme $f^{(n-1)}$ est dérivable en a , on a alors $An! \xrightarrow{x \rightarrow a} f^{(n)}(a)$ ce qui permet d'écrire

$$A = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!} \epsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \epsilon_1(x) = 0.$$

En reportant dans l'expression choisie de A , on obtient bien

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \epsilon(x) = \frac{\epsilon_1(x)}{n!} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

□

Les hypothèses que l'on a données visent à avoir un énoncé le plus général possible. Dans la pratique, on a souvent à écrire une formule de Taylor-Young en a pour une fonction f qui est \mathcal{C}^∞ sur un intervalle ouvert contenant a . Dans ce cas, les hypothèses du théorème 1.5 sont bien sûr vérifiées.

Exemples. En $a = 0$, la formule de Taylor avec reste de Young s'écrit

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + x^n \epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0.$$

Pour $f : x \mapsto e^x$ (qui est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}), on a $f^{(k)}(0) = 1$ pour tout k , et la formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre n en 0 s'écrit :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Pour $f : x \mapsto \sin x$, les valeurs en 0 de la fonction et de ses dérivées successives sont 0, 1, 0, -1 et puis on recommence. La formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre $2n$ en 0 s'écrit

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).$$

Pour $f : x \mapsto \cos x$, les valeurs en 0 de la fonction et de ses dérivées successives sont 1, 0, -1, 0 et puis on recommence. La formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre $2n+1$ en 0 s'écrit

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

Soit α un nombre réel. Alors $f(x) = (1+x)^\alpha$ définit une fonction \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$, et $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$. La formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre n en 0 s'écrit

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

1.2.2 Développements limités

Définition 1.6. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I contenant a . On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n en a** s'il existe des réels a_0, \dots, a_n tels que

$$f(a+h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + h^n\epsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0.$$

Le polynôme $a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n$ s'appelle la **partie régulière** de ce développement limité.

Remarques.

- Un développement limité de f à l'ordre n nous donne un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui « se comporte comme f à l'ordre n » au voisinage de a , dans le sens que la différence entre $f(a+h)$ et ce polynôme en h est négligeable devant h^n quand h tend vers 0.
- Si la fonction f est $n-1$ fois dérivable sur un intervalle contenant a et a une dérivée n -ième en a , la formule de Taylor-Young nous donne un développement limité à l'ordre n , avec $a_0 = f(a)$ et $a_k = f^{(k)}(a)/k!$ pour $1 \leq k \leq n$.
- Réciproquement, on peut se demander si un développement limité est toujours donné par une formule de Taylor-Young, c.-à-d. si une fonction qui a un développement limité à l'ordre n en a a une dérivée n -ème en a . C'est vrai à l'ordre 1, et dans un développement limité

$$f(a+h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + o(h^n)$$

on a toujours $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$. Mais ceci ne va plus à l'ordre 2. Considérons par exemple la fonction $f : x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3 \sin(1/x)$. où l'on pose $f(0) = 0$.

f a un développement limité à l'ordre 2 en 0 : $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$. En effet, on a $x^3 \sin(1/x) = x^2 \cdot x \sin(1/x)$ avec $|x \sin(1/x)| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. On vérifie d'autre part que f est dérivable sur \mathbb{R} avec

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin(1/x) - x \cos(1/x) = 1 + x(2 - \cos(1/x)) + 3x^2 \sin(1/x), \quad \text{et} \quad f'(0) = 1$$

et f n'a donc pas de dérivée seconde en 0 car

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{f'(x) - 1}{x} = 2 - \cos(1/x) + 3x \sin(1/x)$$

n'a pas de limite quand x tend vers 0.

Exemple. Pour tout réel $x \neq 1$ on a $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$ (souvenez vous de la somme des termes d'une suite géométrique...) et on en déduit le développement limité en 0

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n).}$$

Introduisons une notation qui sera utile pour la suite. Si P est un polynôme, on désignera par $T_k(P)$ (le **tronqué** de P au degré k) le polynôme obtenu à partir de P en ne conservant que les monômes de degrés inférieurs ou égaux à k . Par exemple $T_4(x - x^3/3 + 2x^5) = x - x^3/3$.

Proposition 1.7. 1) Un développement limité, lorsqu'il existe, est unique.

2) Si f a un développement limité à l'ordre n en a , de partie régulière P , et si $k \leq n$, alors f a aussi un développement limité à l'ordre k , dont la partie régulière est le tronqué $T_k(P)$.

Démonstration : 1) Si on a

$$f(a+h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + h^n\epsilon(h) = b_0 + b_1h + \dots + b_nh^n + h^n\varphi(h),$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$, alors, pour tout k de $\{0, 1, \dots, n\}$

$$\frac{(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)h + \dots + (a_n - b_n)h^n}{h^k} = h^{n-k}(\varphi(h) - \epsilon(h))$$

ce qui, en donnant successivement à k les valeurs $0, 1, \dots, n$ et en faisant tendre h vers 0, entraîne $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$ et donc aussi $\epsilon(h) = \varphi(h)$.

2) Avec les mêmes notations, $f(a+h) = a_0 + a_1h + \dots + a_kh^k + [a_{k+1}h^{k+1} + \dots + a_nh^n + o(h^n)]$, et le terme entre crochet est $h^k[a_{k+1}h + \dots + a_nh^{n-k} + o(h^{n-k})] = o(h^k)$. \square

Voici maintenant une remarque dont il est utile de se souvenir pendant les calculs

Proposition 1.8. *La partie régulière du développement limité en 0 d'une fonction paire (resp. impaire) est un polynôme pair (resp. impair), c.-à-d. qu'il ne contient que des puissances paires (resp. impaires) de la variable.*

Démonstration : Si f est paire et si, en 0

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

alors en changeant x en $-x$ on obtient

$$f(x) = f(-x) = a_0 - a_1x + \dots - a_{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

d'où par unicité du développement limité, $a_1 = -a_1, \dots, a_{2n+1} = -a_{2n+1}$ et donc

$$f(x) = a_0 + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n} + o(x^{2n+1}).$$

\square

Par exemple, la partie régulière du développement limité de $\sin x$ en 0 ne contient que des puissances impaires.

1.2.3 Opérations sur les développements limités

Dans tout ce paragraphe, nous ne considérerons que des développements limités en 0.

Proposition 1.9 (Somme et produit). *Si f et g sont des fonctions ayant des développements limités au même ordre n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n) \quad g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n),$$

alors $f + g$ et fg ont aussi un développement limité à l'ordre n en 0 et on a :

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + o(x^n) \\ (fg)(x) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + \left(\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}\right)x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

Autrement dit, la partie régulière du développement limité de la somme est la somme des parties régulières de chacun des développements limités, et celle du produit est le tronqué au degré n du produit des parties régulières (tous les développements limités étant au même ordre n).

Démonstration : Le premier point est clair puisque $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$ (et oui, il s'agit bien d'un abus d'écriture!).

Pour le produit, on écrit $f(x) = A(x) + o(x^n)$ et $g(x) = B(x) + o(x^n)$ et on a alors $f(x)g(x) = A(x)B(x) + [A(x) + B(x) + o(x^n)]o(x^n)$ et on conclut en remarquant que d'une

part $A(x)B(x) = T_n[A(x)B(x)] + o(x^n)$ et d'autre part $[A(x) + B(x) + o(x^n)]o(x^n) = o(x^n)$ (toujours pour x tendant vers 0). \square

Exemples.

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 = 1 - x^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{24}\right)x^4 + o(x^5) \\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5)\end{aligned}$$

Quand on fait le produit des parties régulières (ou qu'on élève au carré, comme ici), il n'est bien entendu pas besoin de calculer les termes dont le degré dépasse l'ordre du développement limité. Il est bon aussi de se souvenir d'éventuelles propriétés de parité (par exemple dans le cas d'un carré). Ici, on aurait aussi pu utiliser $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$.

Il se peut que l'on gagne des ordres dans le développement limité du produit. Par exemple, pour avoir le développement limité de $\sin^3 x$ à l'ordre 6, on peut faire

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 = x^3 \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^3 \\ &= x^3 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^6)\end{aligned}$$

Il est quelquefois utile, comme ici, de mettre des puissances de x en facteur, en se souvenant que $o(x^{d+e}) = x^d o(x^e)$ (toujours quand x tend vers 0, bien sûr).

Conséquence. La partie régulière du développement limité de la partie paire d'une fonction f (définie comme $(f(x) + f(-x))/2$) est la partie paire de la partie régulière du développement limité de $f(x)$. De même pour la partie impaire. En partant de e^x , ceci nous donne

$$\begin{array}{l} \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \end{array}$$

Proposition 1.10 (Substitution). *Si f et g sont des fonctions ayant des développements limités au même ordre n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n),$$

et si $g(0)=0$ alors $f(g(x))$ a un développement limité à l'ordre n en 0, dont la partie régulière s'obtient en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans

$$a_0 + a_1(b_1 x + \cdots + b_n x^n) + \cdots + a_n(b_1 x + \cdots + b_n x^n)^n.$$

Autrement dit, si $A(x)$ est la partie régulière du développement limité de $f(x)$ et $B(x)$ ($B(0) = 0$) celle de $g(x)$, alors la partie régulière du développement limité de $f(g(x))$ est le tronqué $T_n(A(B(x)))$.

Démonstration: Comme $B(0) = 0$, on peut écrire $B(x) = xB_1(x)$ où B_1 est un polynôme. Mais alors $\underset{x \rightarrow 0}{o}(g(x)^n) = g(x)^n \epsilon(g(x)) = x^n \cdot [B_1(x) + \underset{x \rightarrow 0}{o}(1)]^n \epsilon(g(x))$ avec $\lim_{X \rightarrow 0} \epsilon(X) = 0$ et donc

$$\underset{x \rightarrow 0}{o}(g(x)^n) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n).$$

Par ailleurs, pour tout $k \leq n$, on a $g(x)^k = (B(x) + o(x^n))^k = B(x)^k + o(x^n)$. Donc

$$f(g(x)) = A(B(x) + o(x^n)) + o(g(x)^n) = A(B(x)) + o(x^n) = T_n(A(B(x))) + o(x^n).$$

\square

Il faut bien prendre garde à la condition $g(0) = 0$ quand on substitue. La démonstration montre qu'elle est nécessaire pour garder un contrôle sur le reste après substitution. Par exemple, pour calculer le développement limité de $e^{\cos x}$ en 0 à l'ordre 3, si on écrit

$$e^{\cos x} = 1 + (1 - x^2/2) + \frac{(1 - x^2/2)^2}{2!} + \frac{(1 - x^2/2)^3}{3!} + o(x^3) = \frac{8}{3} - \frac{5}{4}x^2 + o(x^3),$$

ON A TOUT FAUX! En effet, $\cos 0 = 1 \neq 0$. Le calcul correct est

$$e^{\cos x} = e(e^{\cos x - 1}) = e(1 + (-x^2/2) + o(x^3)) = e - \frac{e}{2}x^2 + o(x^3).$$

On constate ici que l'on gagne même en précision : on a déjà le développement limité à l'ordre 3 en substituant $\cos x - 1$ dans le développement limité à l'ordre 1 de e^x . Ceci vient du fait que $\cos x - 1 = O(x^2)$ quand $x \rightarrow 0$. Dans le même ordre d'idée, la partie régulière du développement limité de $f(x^2)$ à l'ordre $2n + 1$ en 0 s'obtient en substituant x^2 à x dans la partie régulière du développement limité de $f(x)$ à l'ordre n .

Proposition 1.11 (Quotient). *Si f et g sont des fonctions ayant des développements limités au même ordre n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n) \quad g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n),$$

et si $g(0) \neq 0$ alors f/g a aussi un développement limité à l'ordre n .

Démonstration : Sous ces hypothèses, il suffit d'écrire

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{b_0} (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)) \frac{1}{1 + \left(\frac{b_1}{b_0}x + \dots + \frac{b_n}{b_0}x^n + o(x^n)\right)}$$

puis d'utiliser le développement limité en 0 de $\frac{1}{1+X}$ et les propositions précédentes. \square

Exemple. Calcul du développement limité à l'origine de $\tan x$ à l'ordre 6. On se souvient que \tan est impaire (il y aura des termes en x , x^3 et x^5 uniquement).

On écrit $\tan x = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}$ avec $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$ et $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$.

On a alors $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)}$. On part alors du développement de $\frac{1}{1-X}$ en

0 à l'ordre 2 $\frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + X^2\varepsilon(X)$ et on applique le théorème de substitution :

$\frac{1}{\cos x} = T_4 \left(1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 \right) + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$. Par parité, ce développement est aussi un développement à l'ordre 5. Enfin, on utilise le théorème sur le produit pour obtenir $\tan x = T_5 \left(\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}\right) \right) + o(x^5)$.

On obtient finalement la formule (qu'il n'est pas mauvais de connaître par coeur)

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)}$$

Proposition 1.12 (Intégration). *Si f a un développement limité à l'ordre n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$$

et si F est une primitive de f définie sur un intervalle ouvert contenant 0 ($F' = f$), alors $F(x)$ a un développement limité à l'ordre $n + 1$ en 0, qui est

$$F(x) = F(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Autrement dit, la partie régulière du développement limité à l'ordre $n + 1$ d'une primitive est une primitive de la partie régulière du développement limité à l'ordre n .

Démonstration : Posons

$$B(x) = F(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}, \quad G(x) = F(x) - B(x).$$

G est dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0,

$$G'(x) = f(x) - (a_0 + \cdots + a_nx^n) = o(x^n) = x^n\epsilon(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$, et $G(0) = 0$. Donc, d'après le théorème des accroissements finis, $G(x) = xG'(\theta x)$ avec θ dépendant de x , $0 < \theta < 1$. Ainsi

$$G(x) = x(\theta x)^n \epsilon(\theta x) = x^{n+1} \theta^n \epsilon(\theta x) = o(x^{n+1}),$$

car $\lim_{x \rightarrow 0} \theta^n \epsilon(\theta x) = 0$. Au total,

$$F(x) = F(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

□

Exemples. • Ainsi, de $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$ on obtient par intégration

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

• De $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$ on tire par intégration

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

Exercice. Calculer le développement limité à l'ordre 5 de arcsin en 0.

Corollaire 1.13 (Dérivation). *Si f a un développement limité à l'ordre $n \geq 1$ en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n),$$

si f est dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0 et si sa dérivée f' a un développement limité à l'ordre $n - 1$ en 0, celui-ci est : $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + o(x^{n-1})$.

Démonstration : On écrit le développement limité $f'(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + o(x^{n-1})$, et on utilise la proposition précédente qui nous donne

$$f(x) = f(0) + b_0x + \frac{b_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{b_{n-1}}{n}x^n + o(x^n),$$

et on identifie pour conclure avec $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$. □

On est obligé dans l'énoncé de mettre comme hypothèse l'existence du développement limité de f' à l'ordre $n - 1$. Ceci ne vient pas automatiquement, comme le montre l'exemple donné plus haut d'une fonction qui a un développement limité à l'ordre 2 en 0, mais qui n'est pas deux fois dérivable. Sa dérivée n'a pas de dérivée en 0, ce qui veut dire qu'elle n'a pas de développement limité d'ordre 1.

1.2.4 Utilisation des développements limités

Les développements limités servent à calculer des limites, ils servent aussi à l'étude des courbes. Pour les calculs, on se ramène toujours à écrire des développements limités en 0.

• Quand on est au voisinage de a , on fait le changement de variable $x = a + h$ et on écrit des développements limités en 0 pour la variable h . Par exemple, pour obtenir le développement limité de $\tan x$ en $\pi/4$ à l'ordre 2, on écrit

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) &= \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan h}{1 - \tan\frac{\pi}{4} \tan h} = \frac{1 + \tan h}{1 - \tan h} = \frac{1 + h + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^2)}{1 - h + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^2)} \\ &= (1 + h + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^2))(1 + h + h^2 + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^2)) = 1 + 2h + 2h^2 + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h^2),\end{aligned}$$

On peut aussi écrire $\tan x = 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2 + \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}{o}((x - \frac{\pi}{4})^2)$.

• Au voisinage de l'infini, on utilise le changement de variable $x = 1/t$, et on écrit des développements limités en 0 pour la variable t . Soit par exemple à étudier la branche infinie pour x tendant vers $-\infty$ de la courbe d'équation

$$y = \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1}.$$

Pour $x < -1$, on a (attention aux signes!)

$$y = x \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} + x \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}.$$

On pose $t = 1/x$, et on écrit le développement limité de $f(t) = \sqrt[3]{1 + t^2 + t^3} + \sqrt{1 - t - t^2}$ à l'ordre 2 en 0. On a

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1 + t^2 + t^3} &= 1 + \frac{1}{3}(t^2 + t^3) + o(t^2) = 1 + \frac{t^2}{3} + o(t^2) \\ \sqrt{1 - t - t^2} &= 1 + \frac{1}{2}(-t - t^2) - \frac{1}{8}(-t - t^2)^2 + o(t^2) = 1 - \frac{t}{2} - \frac{5t^2}{8} + o(t^2) \\ f(t) &= 2 - \frac{t}{2} - \frac{7t^2}{24} + o(t^2)\end{aligned}$$

et donc, en $-\infty$,

$$y = x \left(2 - \frac{1}{2x} - \frac{7}{24x^2} + \underset{x \rightarrow -\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = 2x - \frac{1}{2} - \frac{7}{24x} + \underset{x \rightarrow -\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite d'équation $y = 2x - 1/2$ est asymptote, et la courbe est au dessus de l'asymptote car $-7/(24x) + \underset{x \rightarrow -\infty}{o}(1/x) > 0$ quand x est « proche de $-\infty$ ».

Les règles de calcul sur les développements limités sont mécaniques, et on peut les programmer : les systèmes de calcul formel permettent de calculer des développements limités sans effort ! Par exemple, demandons au logiciel MAPLE le développement limité de $\tan x$ en $\pi/4$

> taylor(tan(x), x=Pi/4, 5);

$$\begin{aligned} & 1 + 2 (x - 1/4 \text{ Pi}) + 2 (x - 1/4 \text{ Pi})^2 + 8/3 (x - 1/4 \text{ Pi})^3 + 10/3 (x - 1/4 \text{ Pi})^4 \\ & + 0((x - 1/4 \text{ Pi})^5) \end{aligned}$$

Remarquer que ce qui est obtenu ici est un développement limité à l'ordre 4, et que le reste est présenté sous forme d'un O et pas d'un o : quand $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$, un $O((x - \frac{\pi}{4})^5)$ est un $o((x - \frac{\pi}{4})^4)$, mais la réciproque n'est pas vraie.

Quand on fait les calculs à la main, il y a des pièges classiques dans lesquels il vaut mieux ne pas tomber. On a signalé plus haut une erreur à éviter dans le cas de substitutions. Un point important à garder à l'esprit est : *à quel ordre sont les développements limités?* Il faut *toujours écrire les restes*, pour garder l'ordre en mémoire. Par exemple une écriture du genre

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$$

EST ABSOLUMENT A PROSCRIRE. Elle conduit inévitablement à des calculs comme

$$\sin^2 x \approx x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36}$$

qui font croire que l'on a ainsi le développement limité de $\sin^2 x$ à l'ordre 6 (que vaut-il en réalité?).