UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Contrôle continu du 14 novembre 2018 - CORRIGÉ

Questions de cours (*5 points*)

1) On dit que f est ***uniformément continue sur*** I quand pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour tous x et x' dans I, si $|x - x'| < \delta$, alors $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ \forall x' \in I,\ \Big(|x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon\Big)$$

2) • Il est clair que si f est nulle sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

• Montrons la réciproque par contraposition. Supposons donc f positive ou nulle et non identiquement nulle sur $[a, b]$. Il existe alors un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) > 0$. Par continuité de f, $\displaystyle\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ et on peut donc trouver un réel $\delta > 0$ tel que la fonction f soit minorée par $\dfrac{f(c)}{2}$ sur $[c - \delta, c + \delta]$. La propriété de la moyenne montre alors que $\displaystyle\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx$ est minoré par $(c + \delta - (c - \delta))\dfrac{f(c)}{2}$. Par ailleurs on peut minorer $\displaystyle\int_a^{c-\delta} f(x)dx$ et $\displaystyle\int_{c+\delta}^b f(x)dx$ par 0, puisque f est positive ou nulle. Donc, par la relation de Chasles,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \geqslant (c + \delta - (c - \delta))\frac{f(c)}{2} = \delta f(c) > 0.$$

3) Soit $f \in C_m([a, b[, \mathbb{R})$. On dit que ***l'intégrale*** de f sur $[a, b[$ ***converge*** si la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers b.

Exercice n°1 (*4 points*)

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $X = \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $e^X - 1 \underset{X\to 0}{\sim} X$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$. On en déduit $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. Comme $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (série de Riemann avec $\dfrac{1}{2} < 1$), $\sum u_n$ ne converge donc pas absolument (théorème d'équivalence pour les séries positives).

2) $\sum \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ converge d'après le critère spécial aux séries alternées : c'est une série alternée et la suite $\left(\left|\dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0.

3) Le développement limité en 0 de $X \mapsto e^X$ à l'ordre 2 est : $e^X = 1 + X + \dfrac{X^2}{2} + X^2\varepsilon(X)$ avec $\displaystyle\lim_{X\to 0} \varepsilon(X) = 0$.

4) De la question précédente on déduit $u_n = -\dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \dfrac{1}{8n} - \dfrac{1}{4n}\varepsilon_1(n)$ avec $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \varepsilon_1(n) = 0$. Or, $-\dfrac{1}{8n} - \dfrac{1}{4n}\varepsilon_1(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{8n}$ donc $\sum \left(-\dfrac{1}{8n} - \dfrac{1}{4n}\varepsilon_1(n)\right)$ diverge. Finalement, d'après la question 2), la série $\sum u_n$ diverge comme somme d'une série convergente et d'une série divergente.

$\boxed{\textbf{Exercice n°2}}$ (*3 points*)

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $R_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{j}{n}}$ donc $R_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$ où $f : x \longmapsto \frac{1}{1+x}$. R_n est donc une somme de Riemann de f sur l'intervalle $[0,1]$.

b) Comme f est intégrable (car continue) sur le segment $[0,1]$, on en déduit que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_0^1 f$ c'est-à-dire vers $[\ell n\,(1+x)]_0^1 = \ell n\, 2$.

2) De même, $T_n = \sum_{j=1}^{(k-1)n} \frac{1}{n+j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{(k-1)n} f\left(\frac{j}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{k-1} f$. Finalement, $\lim_{n\to+\infty} T_n = \ell n\, k$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°3}}$ (*5 points*)

1) Comme X^2+2 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ assure l'existence de $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$F = \frac{3X}{(X+1)(X^2+2)} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2+2}$$

- En multipliant F par $X+1$ puis en évaluant en -1 on obtient $\frac{-3}{(-1)^2+2} = a$ soit $a = -1$.
- En multipliant F par X puis en faisant tendre X vers $+\infty$ on obtient $0 = a+b$ et donc $b = 1$.
- En évaluant en 0 on obtient $0 = a + \frac{c}{2}$ et donc $c = 2$.

Finalement, $\quad F = \frac{3X}{(X+1)(X^2+2)} = \frac{-1}{X+1} + \frac{X+2}{X^2+2}$.

2) Par linéarité de l'intégrale, on déduit de la question précédente

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+2} + \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2+2} = -\ell n\,|x+1| + \frac{1}{2}\ell n\,(x^2+2) + \int \frac{\mathrm{d}x}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1}$$

Le changement de variable $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$ donne alors $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ell n \frac{\sqrt{x^2+2}}{|x+1|} + \sqrt{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}$ soit finalement

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ell n \frac{\sqrt{x^2+2}}{|x+1|} + \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \text{constante}$$

3) a) $g : t \longmapsto \frac{\sin(2t)}{(\cos t+1)(3-\sin^2 t)}$ est continue donc intégrable (au sens de Riemann) sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b) On constate que l'expression $g(t)\,\mathrm{d}t$ est invariante quand on remplace t par $-t$. Les règles de Bioche conduisent alors à effectuer le changement de variable $u = \cos t$.
On a alors $\mathrm{d}u = -\sin t\,\mathrm{d}t$ et donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t}{(\cos t+1)(3-1+\cos^2 t)} = \int_1^0 \frac{2u(-\,\mathrm{d}u)}{(u+1)(2+u^2}$. On a donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g = \frac{2}{3}\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u$. La question 2) permet alors d'écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g = \frac{2}{3}\left[\ell n \frac{\sqrt{x^2+2}}{|x+1|} + \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(\ell n \frac{\sqrt{3}}{2} - \ell n\,\sqrt{2} + \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$ (*3 points*)

1) Soit $x > 0$. $g : t \longmapsto \dfrac{t\ell n\, t}{t^4 + 3t^2 + 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (le trinôme au dénominateur ne s'annule pas) donc sur le segment $[\frac{1}{x}, x]$ (ou $[x, \frac{1}{x}]$). g est donc Riemann-intégrable sur ce segment et par suite $F(x)$ existe bien.

2) g étant continue sur $]0, +\infty[$, on peut considérer une primitive G de g sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel $x > 0$ on a alors $F(x) = [G(t)]_x^{\frac{1}{x}} = G\left(\frac{1}{x}\right) - G(x)$. $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$ et G est dérivable sur $]0, +\infty[$ (par définition d'une primitive) donc $x \mapsto G\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Par suite F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a (théorème de dérivation d'une composée) $\forall x > 0,\ F'(x) = -\dfrac{1}{x^2}G'\left(\dfrac{1}{x}\right) - G'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\frac{1}{x}\ell n\, \frac{1}{x}}{(\frac{1}{x})^4 + 3(\frac{1}{x})^2 + 1} - \dfrac{x\ell n\, x}{x^4 + 3x^2 + 1}$ soit $\forall x > 0,\ F'(x) = \dfrac{x\ell n\, x}{1 + 3x^2 + x^4} - \dfrac{x\ell n\, x}{x^4 + 3x^2 + 1} = 0$.

3) On en déduit que F est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
En particulier, $\forall x > 0,\ F(x) = F(1) = \displaystyle\int_1^1 \dfrac{t\ell n\, t}{t^4 + 3t^2 + 1}\,\mathrm{d}t = 0$.