UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Contrôle continu n°2 - CORRIGÉ

Exercice n°1

1. On a $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.
2. Par conséquent, $e^{3x} \underset{x\to 0}{=} 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + o(x^2)$ et $e^{2x} \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + o(x^2)$, d'où
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} - \left(1 + 2x + \frac{4x^2}{2}\right) - x + o\Big(x^2\Big) \underset{x\to 0}{=} \frac{5}{2}x^2 + o\Big(x^2\Big)$$
3. On a $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$.
4. Par conséquent, $\sqrt{1+4x} \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x - 2x^2 + o(x^2)$, d'où
$$g(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x - 2x^2 - 1 - 2x + o\Big(x^2\Big) \underset{x\to 0}{=} -2x^2 + o\Big(x^2\Big)$$
5. On en déduit que
$$\frac{e^{3x} - e^{2x} - x}{\sqrt{1+4x} - 1 - 2x} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{5}{4},$$
et donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - e^{2x} - x}{\sqrt{1+4x} - 1 - 2x} = -\frac{5}{4}$.

Exercice n°2

La fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{x}\sin x}{1+x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Pour connaitre la nature de l'intégrale, il faut donc étudier le comportement de la fonction au voisinage de l'infini. On remarque que, pour tout $x \geqslant 1$,
$$\left|\frac{\sqrt{x}\sin x}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \leqslant \frac{\sqrt{x}}{x^2}.$$
Comme $\frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}}$ et $3/2 > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{t^2}\,dt$ converge et donc par le théorème de comparaison l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin x}{1+x^2}\,dt$ est absolument convergente.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin x}{1+x^2}\,dt$ est absolument convergente et donc convergente.

Exercice n°3

1. La fonction $f : x \mapsto \ln(\ln x)$ est continue sur $[e, +\infty[$ et converge vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \ln(\ln t)\,dt$ diverge.
2. La fonction $G : x \mapsto x\ln(\ln x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[e, +\infty[$ de dérivée $G'(x) = \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}$. Par conséquent, la fonction $g : x \mapsto \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}$ est continue sur $[e, +\infty[$ telle que $\int_e^x g(t)\,dt = x\ln(\ln x)$.

Par ailleurs, comme $\dfrac{g(x)}{f(x)} = 1 + \dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln x}$, on a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$. Les fonctions étant positives sur $[\mathrm{e}, +\infty[$, d'après le théorème sur les fonctions positives équivalentes avec des intégrales divergentes, on en déduit que

$$\int_{\mathrm{e}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_{\mathrm{e}}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t,$$

c'est à dire $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{x} \ln(\ln t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln(\ln x)$.

Autre méthode : on peut transformer l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{x} \ln(\ln t)\,\mathrm{d}t$ en utilisant le théorème d'intégration par parties.

Exercice n°4

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2-x}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ est positive et continue sur $]0, 1]$. Au voisinage de zéro, on a $\frac{1}{2-x}\sqrt{\frac{1-x}{x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}}$. Comme $1/2 < 1$, l'intégrale de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{1/2}}$ converge sur $]0, 1]$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2-t}\sqrt{\frac{1-t}{t}}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. En effet,
$$\frac{-1}{1+2u^2} + \frac{1}{1+u^2} = \frac{-1-u^2+1+2u^2}{(1+2u^2)(1+u^2)} = \frac{u^2}{(1+2u^2)(1+u^2)}.$$
3. (a) La fonction $\varphi : t \mapsto \sqrt{\frac{1-t}{t}}$ est continue sur $]0, 1]$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, 1[$. On remarque que $\varphi(t) = \sqrt{\frac{1}{t} - 1}$ est une fonction strictement décroissante sur $]0, 1]$ à valeurs dans $[0, +\infty[$ et donc φ est bijective. On peut par conséquent, utiliser ce changement de variable pour calculer l'intégrale généralisée.
   (b) On a $t = \frac{1}{1+u^2}$.
4. On remarque que $t = \frac{1}{1+u^2}$. Par conséquent, $\mathrm{d}t = \frac{-2u}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u$. Par ailleurs, on a
$$\frac{1}{2-t}\sqrt{\frac{1-t}{t}} = \frac{1+u^2}{1+2u^2}u.$$
Par conséquent,
$$\int_0^1 \frac{1}{2-t}\sqrt{\frac{1-t}{t}}\,\mathrm{d}t = -\int_{+\infty}^{0} \frac{1+u^2}{1+2u^2}u\frac{-2u}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{(1+2u^2)(1+u^2)}\mathrm{d}u.$$
Comme $\frac{2u^2}{(1+2u^2)(1+u^2)} = 2\left(\frac{-1}{1+2u^2} + \frac{1}{1+u^2}\right)$, une primitive de $u \mapsto \frac{2u^2}{(1+2u^2)(1+u^2)}$ est $-\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}u\right) + 2\arctan(u)$. Comme $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \arctan(u) = \frac{\pi}{2}$, on a
$$\int_0^1 \frac{1}{2-t}\sqrt{\frac{1-t}{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{\sqrt{2}}\pi + \pi = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\pi.$$

Exercice n°5

1. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Par ailleurs
$$a^u = \mathrm{e}^{u\ln a} \underset{u\to 0}{=} 1 + u\ln a + o(u).$$
Par conséquent, par composition, pour $u = 1/x$, on a
$$a^{1/x} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln a}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. (a) On sait que $\ln(1+v) \underset{v\to 0}{\sim} v$. Par ailleurs,

$$\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{\ln a+\ln b}{2x}+o\Big(\frac{1}{x}\Big) = 1+\frac{\ln\sqrt{ab}}{x}+o\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

Comme $ab \neq 1$, on a $\ln(\sqrt{ab}) \neq 0$ et on déduit que,

$$\ln\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln\sqrt{ab}}{x}.$$

(b) Comme $\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)}$ et

$$x\ln\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln\sqrt{ab},$$

par continuité de la fonction exponentielle, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x = \mathrm{e}^{\ln\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$.

3. Si $ab=1$, on a

$$\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2} \underset{x\to+\infty}{=} 1+o\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

et donc

$$\ln\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right) = 0$ et donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x = \mathrm{e}^0 = 1.$$