UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Contrôle continu du 14 novembre 2019

Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
Le barème est donné à titre indicatif.

Les exercices sont indépendants les uns des autres.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Questions de cours (*4,5 points*)

1) Quand dit-on qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un développement limité au voisinage de 0 ? (Donner la définition.)

2) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales sur un segment $[a, b]$.

3) Énoncer et démontrer le théorème d'intégration par parties pour une intégrale sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

4) Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b[$ de $\mathbb{R}$. Quand dit-on que $\displaystyle\int_a^b f$ converge ? (Donner la définition.)

Exercice n°1 (*2 points*)

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ dont le terme général est $u_n = n^2 \tan\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$.

Exercice n°2 (*5 points*)

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

1) Démontrer que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente. Qu'en déduit-on pour la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

2) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

a) En majorant la fonction intégrée, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_{k-1} + I_k$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = I_0 + (-1)^{n+1} I_n$.

c) Retrouver alors que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \longmapsto \ell n\,(1+x)$. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à f à l'ordre n sur l'intervalle $[0, 1]$. Retrouver alors que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Tournez la page S.V.P.

Exercice n°3 (*5 points*)

1) Trouver les réels a, b et c pour lesquels on a :

$$\forall X \in \mathbb{R} \qquad \frac{X}{X^3+1} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}.$$

2) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2-x+1}$.

3) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos^3 t + \sin^3 t}\, \mathrm{d}t$.

Exercice n°4 (*3,5 points*)

Pour tout réel $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ell n\, t}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$.

1) Soit $x > 0$. Justifier l'existence de $F(x)$.

2) On cherche à présent à calculer $F(x)$.

a) Première méthode. Montrer que F est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout $x > 0$, $F'(x)$. En déduire la valeur de $F(x)$.

b) Deuxième méthode. Montrer que l'on peut procéder au changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$. En déduire la valeur de $F(x)$.

`Fin du contrôle.`