UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Contrôle continu du 14 novembre 2018

Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
Le barème est donné à titre indicatif.

Les exercices sont indépendants les uns des autres.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Questions de cours (*5 points*)

1) Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Quand dit-on que f est uniformément continue sur I ? (Donner la définition.)

2) Soit f une fonction continue et positive sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Démontrer que $\displaystyle\int_a^b f = 0$ si et seulement si f est nulle sur $[a, b]$.

3) Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b[$ de $\mathbb{R}$. Quand dit-on que $\displaystyle\int_a^b f$ converge ? (Donner la définition.)

Exercice n°1 (*4 points*)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 1 - e^{\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}}$.

1) La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ? *(On pourra commencer par trouver un équivalent simple de u_n.)*

2) Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ est convergente.

3) Donner le développements limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \longmapsto e^x$.

4) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice n°2 (*3 points*)

1) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $R_n = \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right)$.

a) Montrer que R_n est une somme de Riemann d'une fonction que l'on précisera sur un intervalle que l'on précisera.

b) En déduire que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

2) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{kn}\right)$.
Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

Tournez la page S.V.P.

Exercice n°3 (*5 points*)

1) Expliciter la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle

$$\frac{3X}{(X+1)(X^2+2)}.$$

2) En déduire une primitive sur $[0,1]$ de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{3x}{(x+1)(x^2+2)}$.

3) Soit $g : t \longmapsto \dfrac{\sin(2t)}{(\cos t + 1)(3 - \sin^2 t)}$.

a) Expliquer pourquoi g est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice n°4 (*3 points*)

Pour tout réel $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{1}{x}} \frac{t\ell n\, t}{t^4 + 3t^2 + 1}\, dt$.

1) Soit $x > 0$. Justifier l'existence de $F(x)$.

2) Montrer que F est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout $x > 0$, $F'(x)$.

3) En déduire, pour tout $x > 0$, la valeur de $F(x)$.

`Fin du contrôle.`