UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Contrôle continu n°2 (Durée : 2 heures)
Mardi 14 novembre 2017

Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Les exercices sont indépendants les uns des autres, ils peuvent être faits dans l'ordre que vous voulez.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice n°1

1. Rappeler le développement limité de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ à l'ordre n au voisinage de 0.
2. Écrire le développement limité de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2x} - x$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
3. Rappeler le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
4. Écrire le développement limité de $g : x \mapsto \sqrt{1+4x} - 1 - 2x$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
5. En déduire que $\dfrac{\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2x} - x}{\sqrt{1+4x} - 1 - 2x}$ admet une limite quand x tend vers 0 et donner sa valeur.

Exercice n°2

Donner la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, en prenant soin de justifier votre résultat.

Exercice n°3

1. Donner la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \ln(\ln(t))\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{x} \ln(\ln(t))\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln(\ln(x))$.

Exercice n°4

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2-t}\sqrt{\frac{1-t}{t}}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Vérifier que
$$\frac{u^2}{(1+2u^2)(1+u^2)} = \frac{-1}{1+2u^2} + \frac{1}{1+u^2}.$$
3. On pose $u = \sqrt{\dfrac{1-t}{t}}$ sur $]0,1]$.
   (a) Justifier que l'on peut utiliser ce changement de variable.
   (b) Exprimer t en fonction de u.
4. En utilisant le changement de variable proposé, calculer la valeur de l'intégrale
$$\int_0^1 \frac{1}{2-t}\sqrt{\frac{1-t}{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Tournez la page ⇒

Exercice n°5

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Montrer que, au voisinage de $+\infty$,

$$a^{1/x} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln a}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. On suppose $ab \neq 1$.

   (a) En déduire un équivalent de $x \mapsto \ln\left(\dfrac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

   (b) Vérifier que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x = \sqrt{ab}.$$

3. On suppose maintenant $ab = 1$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}}{2}\right)^x = 1$.

`Fin du contrôle.`