UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Contrôle continu du 8 octobre 2020 - CORRIGÉ

Questions de cours *(3,5 points)*

1) Si f et g sont des fonctions ayant des développements limités ***au même ordre*** n en 0 ***et si g(0)≠0*** alors f/g a aussi un développement limité à l'ordre n en 0.

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable par rapport à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite ε avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon(n)=0$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=v_n\varepsilon(n)$.

3) La somme partielle d'ordre n de la série proposée est $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_0$ (somme télescopique). Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc de même nature, ce qui prouve le résultat annoncé, la convergence de la série $\sum u_n$ étant équivalente à celle de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles.

Remarques :
- *Une définition (contrairement à une proposition) ne devrait pas comporter de « si et seulement si ».*
- *Il ne faut pas confondre $\sum u_n$ qui désigne « l'objet » série avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k$ qui désigne un réel (ou un complexe).*

Exercice n°1 *(5 points + 1 point)*

1) On a $\ell n\,(1+X)=X-\dfrac{X^2}{2}+\dfrac{X^3}{3}+X^3\varepsilon(X)$ avec $\lim\limits_{X\to0}\epsilon(X)=0$.
D'autre part, $\ell n\,(2+x)=\ell n\left(2.(1+\frac{x}{2})\right)=\ell n\,2+\ell n\left(1+\frac{x}{2}\right)$. Comme $x\mapsto\frac{x}{2}$ s'annule en 0, le théorème de substitution donne finalement $\ell n\,(2+x)=\ell n\,2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{24}+x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to0}\epsilon(x)=0$.

2) On a $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)$ et $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to0}\epsilon(x)=0$.

3) On déduit des questions précédentes que

$$2\ell n\,(2+x)-e^x-2\cos x+a-\frac{1}{4}x^2=2\ell n\,2+x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3-1-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3-2+x^2+a-\frac{1}{4}x^2+x^3\varepsilon(x)$$

soit $2\ell n\,(2+x)-e^x-2\cos x+a-\frac14x^2=(2\ell n\,2-3+a)-\frac{1}{12}x^3+x^3\varepsilon(x)$. Or, $\sin x\underset{x\to0}{\sim}x$ donc $\sin^3x\underset{x\to0}{\sim}x^3$. La quantité proposée admet donc une limite finie en 0 si et seulement si $a=3-2\ell n\,2$. On a alors

$$\frac{2\ell n\,(2+x)-e^x-2\cos x+a-\frac14x^2}{\sin^3x}=\frac{-\frac{1}{12}x^3+x^3\varepsilon(x)}{x^3+x^3\varepsilon(x)}=\frac{-\frac{1}{12}+\varepsilon(x)}{1+\varepsilon(x)}\xrightarrow[x\to0]{}-\frac{1}{12}.$$

Remarque : la coquille originelle du texte n'affectait que le passage à la limite final. Le barème en a tenu compte.

Exercice n°2 *(3,5 points)*

1) Pour $n\in\mathbb{N}$, notons S_n^u (respectivement S_n^v) la somme partielle de la série $\sum u_n$ (respectivement $\sum v_n$).
- Si n est pair, $S_n^v=u_0+0+u_1+\cdots+0+u_{\frac{n}{2}}=S^u_{\frac{n}{2}}$.
- Si n est impair, $S_n^v=u_0+0+u_1+\cdots+0+u_{\frac{n-1}{2}}+0=S^u_{\frac{n-1}{2}}$.

2) • Si $\sum v_n$ converge alors la suite (S_n^v) converge donc aussi $(S_{2n}^v) = (S_n^u)$ (suite extraite d'une suite convergente) et donc $\sum u_n$ converge. On remarque de plus ici que les sommes sont égales.

• De même, si $\sum u_n$ converge alors les deux suites extraites (S_{2n}^v) et (S_{2n+1}^v) convergent vers la même limite (la somme de la série $\sum u_n$) et on en déduit que la suite (S_n^v) converge : la série $\sum v_n$ converge.

On a donc montré que : $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge. Les deux séries sont donc bien de même nature.

Exercice n°3 (*3 points*)

1) On a $|u_n| = \dfrac{3^n}{n+1}\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3^n}{n+1}$. Comme $\dfrac{3^n}{n+1} = \dfrac{e^{n\ell n\,3}}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (croissance comparée des fonctions puissances et exponentielles), la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

2) On a $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ et $\sum \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ converge (série de Riemann avec $\dfrac{3}{2} > 1$ donc $\sum u_n$ converge absolument et donc converge.

Remarque : La série $\sum u_n$ n'est pas alternée puisque $\sin(n)$ n'a pas un signe constant.

Exercice n°4 (*6 points*)

1) Soit $n \geqslant 1$. On a $X = \dfrac{(-1)^n}{\ell n\, n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\sqrt{1+X}-1 \underset{X\to 0}{\sim} \frac{1}{2}X$ donc $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{2\ell n\, n} = u_n$.

2) On en déduit que $|w_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\ell n\, n} = |u_n|$. Or, $\sqrt{n}.\dfrac{1}{2\ell n\, n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ (croissance comparée des fonctions puissances et logarithmes) donc $\sum \dfrac{1}{2\ell n\, n}$ diverge (critère de Riemann avec $\frac{1}{2} \leqslant 1$) : $\sum u_n$ et $\sum w_n$ ne convergent pas absolument.

3) $\sum \dfrac{(-1)^n}{2\ell n\, n}$ converge d'après le critère spécial aux séries alternées. En effet, c'est une série alternée et la suite $\left(\left|\dfrac{(-1)^n}{2\ell n\, n}\right| = \dfrac{1}{2\ell n\, n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante (car la fonction logarithme népérien est croissante et positive sur $[1,+\infty[$) et converge vers 0.

4) Le développement limité en 0 de $X \mapsto \sqrt{1+X}$ à l'ordre 2 est :

$$\sqrt{1+X} = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + X^2\varepsilon(X) \text{ avec } \lim_{X\to 0}\varepsilon(X) = 0.$$

Or $X = \dfrac{(-1)^n}{\ell n\, n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $w_n = \dfrac{(-1)^n}{2\ell n\, n} - \dfrac{1}{8}\dfrac{1}{(\ell n\, n)^2} + \dfrac{1}{(\ell n\, n)^2}\varepsilon_1(n)$ avec $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_1(n) = 0$.

Par suite, $u_n - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{8}\dfrac{1}{(\ell n\, n)^2}$. Comme $\sqrt{n}.\dfrac{1}{(\ell n\, n)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ (croissance comparée des fonctions puissances et logarithmes), $\sum \dfrac{1}{(\ell n\, n)^2}$ diverge (critère de Riemann avec $\frac{1}{2} \leqslant 1$) et donc la série $\sum(u_n - w_n)$ est divergente. On en déduit finalement que $\sum w_n$ diverge comme somme d'une série convergente et d'une série divergente (puisque $u_n = (u_n - w_n) + w_n$).

Remarque : il était tout à fait indispensable de conserver le reste du développement limité de $\sqrt{1+X}$ dans l'étude.