UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Contrôle continu du 10 octobre 2018 - CORRIGÉ

Questions de cours *(3 points)*

1) Soit a un nombre réel. Soit f une fonction réelle définie et $n-1$ fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a. On suppose que f a une dérivée n-ième $f^{(n)}(a)$ en a. Alors, pour $a+h \in I$, on a

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\, h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\, h^n + h^n \epsilon(h) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0.$$

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable par rapport à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une fonction ε avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$ telle que $u_n = v_n\varepsilon(n)$. On note $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.

3) On remarque que pour $n \geqslant 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$ où $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Comme $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{n-1})_{n\geqslant 1}$ convergent vers la même limite (qui est la somme de la série), on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice n°1 *(5 points)*

1) On a $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ donc $e^{2x} = 1 + 2x + \dfrac{(2x)^2}{2} + \dfrac{(2x)^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$.

D'autre part, $\ell n\,(1+X) = X - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^3}{3} + X^3\varepsilon(X)$ avec $\lim\limits_{X\to 0} \epsilon(X) = 0$.

2) On ne peut pas composer directement puisque $\exp(0) = 1 \neq 0$ mais on écrit

$$\begin{aligned}
\ell n\,(1+e^{2x}) &= \ell n\,\left(2 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)\right) = \ell n\,\left(2\left[1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)\right]\right) \\
&= \ell n\, 2 + \ell n\,\left(1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)\right) \\
&= \ell n\, 2 + (x + x^2 + \frac{2}{3}x^3) - \frac{1}{2}(x^2 + 2x^3) + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \\
&= \ell n\, 2 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^3\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

3) D'autre part, $\sqrt{1-2x} = 1 + \dfrac{(-2x)}{2} - \dfrac{(-2x)^2}{8} + \dfrac{3(-2x)^3}{8.6} + x^3\varepsilon(x)$ et par suite on a :

$$\frac{\ell n\,(1+e^{2x}) + a\sqrt{1-2x} + b}{x^3} = \frac{a + b + \ell n\, 2 + (1-a)x + \frac{1}{2}(1-a)x^2 - \frac{a}{2}x^3 + x^3\varepsilon(x)}{x^3}$$

Cette quantité admet donc une limite en 0 si et seulement si $a = 1$ et $b = -1 - \ell n\, 2$. Sa limite est alors $-\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°2}}$ (*6 points*)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. f est définie en x si et seulement si $x \neq 1$ et $x^2 + x \geqslant 0$. Le domaine de définition de f est donc $D_f =]-\infty, -1] \cup [0, 1[\cup]1, +\infty[$.

2) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \sqrt{2} \times 0 = 0$. De même, $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty\infty} e^X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ (car $\sqrt{2} > 0$).

3) Soit $x > 1$. Posons $t = \dfrac{1}{x-1}$. On a alors $x = 1 + \dfrac{1}{t}$ avec $t \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Or,

$$f(x) = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^2 + 1 + \frac{1}{t}}\exp(t) = \sqrt{2 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2}}\exp(t)$$

et donc, puisque $t > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{t}\sqrt{1 + 3t + 2t^2}\exp(t)$.

- D'une part, $\sqrt{1+y} = 1 + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{8}y^2 + \underset{y \to 0}{o}(y^2)$ et $y = 3t + 2t^2 \xrightarrow[t \to 0]{} 0$,
- d'autre part, $\exp(t) = 1 + t + \dfrac{1}{2}t^2 + \underset{t \to 0}{o}(t^2)$. Par suite,

$$f(x) = \frac{1}{t}\left[\mathbf{T_2}\left((1 + \frac{1}{2}(3t + 2t^2) - \frac{1}{8}(3t + 2t^2)^2)(1 + t + \frac{1}{2}t^2)\right) + \underset{t \to 0}{o}(t^2)\right]$$

On en déduit $f(x) = \dfrac{1}{t}\left[1 + \dfrac{5}{2}t + \dfrac{15}{8}t^2 + \underset{t \to 0}{o}(t^2)\right] = \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{t} + \dfrac{15}{8}t + \underset{t \to 0}{o}(t)$ soit finalement

$$f(x) = x + \frac{3}{2} + \frac{15}{8}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$$

Puisque $f(x) - \left(x + \dfrac{3}{2}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, la droite d'équation $y = x + \dfrac{3}{2}$ est asymptote à la courbe.

4) Le développement précédent montre que, au voisinage de $+\infty$, $f(x) - \left(x + \dfrac{3}{2}\right)$ est du signe de $\dfrac{15}{8}\dfrac{1}{x-1}$. La courbe est donc au dessus de son asymptote.

$\boxed{\textbf{Exercice n°3}}$ (*4 points*)

1) On a $u_n = \dfrac{4^n}{3^n} \cdot \dfrac{1 - \frac{n}{4^n}}{1 + \frac{5}{3^n}}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5}{3^n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{4^n} = 0$ (croissances comparées entre puissance et exponentielle), $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{4^n}{3^n}$. La série géométrique $\sum \left(\dfrac{4}{3}\right)^n$ divergeant car $(\dfrac{4}{3} > 1)$, il en est de même de $\sum u_n$ (théorème d'équivalence pour les séries positives).

2) On a $n^{\frac{5}{4}}|u_n| = \dfrac{\ell n\, n}{n^{\frac{1}{4}}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ (croissances comparées entre logarithme et puissance) donc (critère de Riemann) $\sum u_n$ converge absolument et donc converge.

$\boxed{\textbf{Exercice n°4}}$ (*5 points*)

1) $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^a}$ converge d'après le critère spécial aux séries alternées. En effet, c'est une série alternée et la suite $\left(\left|\dfrac{(-1)^n}{n^a}\right| = \dfrac{1}{n^a}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0 (car $a > 0$).

2) Soit $n \geqslant 1$. On a $X = \dfrac{(-1)^n}{n^a} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\sin X \underset{X\to 0}{\sim} X$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n^a} = w_n$.
On en déduit que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^a}$. Comme $\sum \dfrac{1}{n^a}$ converge si et seulement si $a > 1$ (série de Riemann), $\sum u_n$ converge absolument si et seulement si $a > 1$ (théorème d'équivalence pour les séries positives).

3) Le développement limité en 0 de $X \mapsto \sin X$ à l'ordre 3 est : $\sin X = X - \dfrac{1}{6}X^3 + X^3\varepsilon(X)$ avec $\lim\limits_{X\to 0} \varepsilon(X) = 0$ donc : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a} - \dfrac{1}{6}\dfrac{(-1)^n}{n^{3a}} + \dfrac{1}{n^{3a}}\varepsilon_1(n)$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_1(n) = 0$.
Par suite, $u_n - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{6}\dfrac{(-1)^n}{n^{3a}}$. Comme $\sum \dfrac{1}{n^{3a}}$ converge (série de Riemann avec $3a > 1$), la série $\sum(u_n - w_n)$ est convergente (car absolument convergente). On en déduit finalement que $\sum u_n$ converge comme somme de deux séries convergentes (puisque $u_n = (u_n - w_n) + w_n$).