UNIVERSITÉ DE RENNES 1

# Analyse et Probabilités 3

## Contrôle continu n°1 - CORRIGÉ

**Question de cours** :

1. $f$ est uniformément continue sur $I$ si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall (x, y) \in I^2$ avec $|x - y| < \delta$, on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
2. $f$ n'est pas uniformément continue sur $I$ si $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $\forall \delta > 0$, $\exists\, (x, y) \in I^2$ avec $|x - y| < \delta$ et $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$.
3. La fonction $f$ est lipschitzienne de rapport $K > 0$ sur $I$, i.e.
$$\forall (x, y) \in I^2 \text{ on a } |f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|.$$
Soit $\varepsilon > 0$, on pose $\delta = \varepsilon/K$. Soit $(x, y) \in I^2$ avec $|x - y| < \delta$, on a
$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y| < K\delta = \varepsilon.$$
La fonction $f$ est uniformément continue sur $I$.

**Exercice n°1**

1. On remarque que
$$\frac{1}{n} a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right).$$
On considère la fonction $f : x \mapsto \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, la subdivision régulière $\sigma = (a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$, $a_k = \frac{k}{n}$, de pas $\frac{1}{n}$ de l'intervalle $[0, 1]$. La fonction $f$ étant continue sur $[0, 1]$, la somme de Riemann
$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+1}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)$$
converge vers $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$.
2. On utilise le théorème d'intégration par partie avec les fonctions $u(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ et $v(x) = \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$ qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$. On remarque que $u'(x) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ et $v'(x) = x^{2n}$. Par conséquent,
$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{2n} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1 - \frac{\pi}{2(2n+1)} \int_0^1 x^{2n+1} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{\pi}{2(2n+1)} \int_0^1 x^{2n+1} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x.\end{aligned}$$
3. On a
$$2n \int_0^1 x^{2n} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{2n}{2n+1} - \frac{n\pi}{(2n+1)} \int_0^1 x^{2n+1} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

D'une part, $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{2n+1} = 1$. D'autre part, comme $\forall x \in \mathbb{R}\ |\cos(x)| \leqslant 1$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 x^{2n+1} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_0^1 x^{2n+1} \left|\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right| \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_0^1 x^{2n+1}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2n+2}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\left|\frac{n\pi}{(2n+1)} \int_0^1 x^{2n+1} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{n\pi}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\pi}{(2n+1)(2n+2)} = 0$, on obtient que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\pi}{(2n+1)} \int_0^1 x^{2n+1} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x = 0$.
Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} 2n \int_0^1 x^{2n} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x = 1$.

4. On remarque que, pour $n \geqslant 1$,

$$a_n \int_0^1 x^{2n} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{a_n}{n} \times 2n \int_0^1 x^{2n} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

D'après les questions 1. et 3., on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \int_0^1 x^{2n} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\pi} \times 1 = \frac{1}{\pi}.$$

## Exercice n°2

1. Si le coefficient dominant du polynôme est positif, on a alors $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$.
Par conséquent, il existe $M > 0$ tel que $\forall x \geqslant M\ P(x) \geqslant 1$ et il existe $m < 0$ tel que $\forall x \leqslant m$ $P(x) \leqslant -1$.
Comme $P(M).P(m) < 0$, le polynôme $P$ change de signe sur l'intervalle $[m, M]$.
Si le coefficient dominant du polynôme est négatif, on a $\lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$.
Le raisonnement est alors similaire.
2. La fonction $x \mapsto P(x)$ étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [m, M]$ tel que $P(c) = 0$. $P$ admet donc une racine réelle.
3. C'est faux en général si le degré du polynôme est pair. Par exemple, $P(X) = 1$ et $P(X) = 1+X^2$ n'ont pas de racines réelles.

## Exercice n°3

1. Au voisinage de 0, on a $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n)$.
2. On pose $u = x + x^2$. On remarque que $\lim_{x\to 0} u = 0$. On a $u^2 = x^2 + o(x^2)$. Par composition, on en déduit que

$$\ln\left(1+x+x^2\right) = x + \left(1 - \frac{1}{2}\right)x^2 + o(x^2) = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

3. Au voisinage de 0, on a $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$.
4. On pose $v = x + \frac{1}{2}x^2$. On a $\lim_{x\to 0} v = 0$ et $v^2 = x^2 + o(x^2)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}f(x) &= x - \left(1 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)x^2\right) + o(x^2) \\ &= -1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

5. On déduit de la question précédente que la droite d'équation $y = -1 + \frac{1}{2}x$ est tangente à la courbe au point $(0, -1)$. Comme $-\frac{1}{8} < 0$, la courbe est située sous la tangente au voisinage de ce point.

**Exercice n°4**

Selon les règles de Bioche, on utilise le changement de variable $t = \tan x$. On remarque que

$$\frac{3\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)(1 + 2\cos^2 x)} = \frac{3\tan x - 1}{(\tan x + 1)\left(1 + \frac{2}{1+\tan^2 x}\right)}.$$

Comme $dx = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\int \frac{3\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)(1 + 2\cos^2 x)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{3t - 1}{(t+1)\left(1 + \frac{2}{1+t^2}\right)} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{3t-1}{(t+1)(3+t^2)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On décompose la fraction rationnelle,

$$F(t) = \frac{3t-1}{(t+1)(3+t^2)} = \frac{a}{t+1} + \frac{bt + c}{3+t^2}.$$

Comme $[(t+1)F(t)](-1) = -1$, $a = -1$.
Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} tF(t) = 0$, $b = -a = 1$. Pour $t = 0$, on a $F(0) = -\frac{1}{3}$ et donc $a + \frac{c}{3} = -\frac{1}{3}$, soit $c = 2$.
On a donc

$$\begin{aligned}\int \frac{3t-1}{(t+1)(3+t^2)}\,\mathrm{d}t &= -\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t + \int \frac{t+2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \frac{2t}{3+t^2}\,\mathrm{d}t + 2\int \frac{1}{3+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\ln|1+t| + \frac{1}{2}\ln\left(3+t^2\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + cste.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int \frac{3\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)(1 + 2\cos^2 x)}\,\mathrm{d}x = -\ln|1 + \tan x| + \frac{1}{2}\ln\left(3 + \tan^2(x)\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\right) + cste.$$