UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Contrôle continu du 8 octobre 2020

Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
Le barème est donné à titre indicatif.

Les exercices sont indépendants les uns des autres.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Questions de cours (*3,5 points*)

1) Énoncer la proposition assurant l'existence d'un développement limité pour $\dfrac{f}{g}$ (quotient).

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Quand dit-on que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$? (Donner la définition.)

3) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Démontrer que la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$ et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.

Exercice n°1 (*5 points*)

1) Donner les développements limités à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \ell n\,(1+x)$ puis de $x \longmapsto \ell n\,(2+x)$.

2) Donner les développements limités à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto e^x$ et de $x \longmapsto \cos(x)$.

3) Déterminer le réel a pour lequel la limite pour x tendant vers 0 de

$$\frac{2\ell n\,(2+x) - e^x - 2\cos x + a - \frac{1}{4}x^2}{\sin^3 x}$$

est finie et calculer alors cette limite.

Exercice n°2 (*3 points*)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ u_{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

1) Trouver une relation entre les sommes partielles de la série $\sum v_n$ et celles de la série $\sum u_n$. *On pourra discuter suivant la parité de l'entier n.*

2) En déduire que ces deux séries sont de même nature et que, en cas de convergence, elles ont même somme.

Tournez la page S.V.P.

Exercice n°3 (*3 points*)

Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ dont le terme général est :

1) $u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{n+1}$ **2)** $u_n = \dfrac{(-1)^n \sin n}{n\sqrt{n}+1}$

Exercice n°4 (*5,5 points*)

Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2\,\ell n\,(n)} \qquad \text{et} \qquad w_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\ell n\,(n)}} - 1$$

1) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.

2) Montrer qu'aucune des deux séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ n'est absolument convergente.

3) Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

4) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$.
En déduire la nature de la série $\sum w_n$ (on justifiera soigneusement le raisonnement).

`Fin du contrôle.`