UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Contrôle continu du 10 octobre 2018

Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.
Le barème est donné à titre indicatif.

Les exercices sont indépendants les uns des autres.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Questions de cours (*3 points*)

1) Énoncer le théorème donnant la formule de Taylor avec reste de Young.

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes. Quand dit-on que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable par rapport à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$? (Donner la définition.)

3) Démontrer que si $\sum u_n$ est une série convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice n°1 (*4 points*)

1) Donner les développements limités à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto e^{2x}$ et de $x \longmapsto \ell n\,(1+x)$.

2) En déduire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \ell n\ (1+e^{2x})$.

3) Déterminer les réels a et b tels que la limite pour x tendant vers 0 de

$$\frac{\ell n\,(1+e^{2x}) + a\sqrt{1-2x} + b}{x^3}$$

soit finie et calculer alors cette limite.

Exercice n°2 (*5 points*)

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x^2+x}\ \exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$.

1) Donner le domaine de définition de f.

2) f a-t-elle une limite à gauche en 1 ? et à droite ?

3) Montrer que la courbe représentative de f admet, au voisinage de $+\infty$, une asymptote. *(On pourra poser $t = \dfrac{1}{x-1}$ et utiliser un développement limité.)*

4) *(Question Bonus)* Déterminer la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Tournez la page S.V.P.

Exercice n°3 (*3 points*)
Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ dont le terme général est :

$$\textbf{1)}\ u_n = \frac{2^{2n} - n}{3^n + 5} \qquad\qquad \textbf{2)}\ u_n = \frac{(-1)^n \ell n\, n}{n\sqrt{n}}$$

Exercice n°4 (*5 points*)
Soit a un réel strictement positif. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^a}\right) \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{(-1)^n}{n^a}$$

On cherche à déterminer la nature (absolument convergente, semi-convergente ou divergente) de la série $\sum u_n$ en fonction des valeurs de a.

1) Montrer que la série $\sum w_n$ est convergente.

2) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$. En déduire les valeurs de a pour lesquelles la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

3) Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \sin x$.
En déduire que si $a \in \left]\frac{1}{3}, 1\right[$ alors la série $\sum u_n$ est semi-convergente.

`Fin du contrôle.`