UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Analyse et Probabilités 3

Contrôle continu n°1 (Durée : 2 heures)
Mardi 10 octobre 2017

Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Les exercices sont indépendants les uns des autres, ils peuvent être faits dans l'ordre que vous voulez.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Question de cours : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. Donner la définition de l'uniforme continuité de f sur I.
2. Écrire à l'aide de quantificateurs la proposition « f n'est pas uniformément continue sur I ».
3. Montrer que si f est lipschitzienne de rapport $K > 0$ sur I, alors f est uniformément continue sur I.

Exercice n°1

Pour $n \geqslant 1$, on note $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)$.

1. Étudier la convergence de la suite $\left(\frac{1}{n}a_n\right)_{n\geqslant 1}$ quand n tend vers $+\infty$. Justifiez bien votre résultat.
2. Vérifier que
$$\int_0^1 x^{2n} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1} - \frac{\pi}{2(2n+1)} \int_0^1 x^{2n+1} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x.$$
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2n \int_0^1 x^{2n} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x = 1$.
4. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n \int_0^1 x^{2n} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x$.

Exercice n°2

On souhaite montrer que tout polynôme de degré impair admet une racine réelle. On considère P un polynôme de degré impair.

1. Montrer qu'il existe un segment $[m, M]$ tel que $x \mapsto P(x)$ change de signe sur $[m, M]$.
2. En déduire que P admet une racine réelle.
3. Est-ce encore vrai si P est un polynôme de degré pair ?

Tournez la page ⇒

Exercice n°3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x - \sqrt{1 + \ln\left(1 + x + x^2\right)}$.

1. Rappeler le développement limité de $\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre n.
2. Calculer le développement limité de $\ln\left(1 + x + x^2\right)$ en 0 à l'ordre 2.
3. Rappeler le développement limité de $\sqrt{1+x}$ en 0 à l'ordre 2.
4. En déduire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
5. Déterminer la tangente à la courbe représentative de f en 0 et étudier la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

Exercice n°4

Calculer une primitive

$$\int \frac{3\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)(1 + 2\cos^2 x)}\,\mathrm{d}x.$$

`Fin du contrôle.`