Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Feuille d'exercices n°5

Espérance, variance

Exercice n°1

On lance deux dés et on note S la somme de leurs résultats. Déterminer l'espérance de S.

Exercice n°2

Une urne contient cinq boules blanches, deux boules noires et trois boules rouges toutes indiscernables au toucher. On extrait simultanément deux boules de l'urne. On suppose que la sortie d'une boule noire représente un gain de 7 points, celle d'une boule rouge un gain de 2 points et celle d'une boule blanche une perte de 2 points. Soit X la variable aléatoire qui à tout tirage de deux boules fait correspondre le nombre de points gagnés. Trouver la loi puis l'espérance mathématique de X.

Exercice n°3

L'amicale d'une entreprise organise une loterie une fois par mois. Chaque mois, elle met en vente 25 billets parmi lesquels on trouve 5 billets gagnants. Une personne A décide d'acheter un billet par mois pendant trois mois. On suppose les différents tirages indépendants chaque mois. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de billets gagnants sur 3 mois.

1) Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique et son écart-type.

2) Un billet coûte 4 euros et un billet gagnant rapporte 10 euros. Calculer l'espérance mathématique de gain net sur trois mois pour A.

Exercice n°4

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher dont trois sont blanches et cinq sont noires. On extrait de l'urne, une par une, quatre boules que l'on pose, dans l'ordre où elles sont tirées, dans quatre cases numérotées de 1 à 4. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le plus petit des numéros de cases occupées par une boule noire (par exemple si l'on a posé dans les cases 1, 2, 3 et 4 respectivement une boule blanche, une boule noire, une boule noire et une boule blanche, X prend la valeur 2).
Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

Exercice n°5

On considère le jeu de hasard suivant : un joueur parie k euros sur un numéro de 1 à 6. On lance ensuite trois dés équilibrés ; si le numéro parié ne sort pas, le joueur perd sa mise. Sinon, on lui rend sa mise augmentée de sa mise multipliée par le nombre de fois que son numéro est apparu. Ce jeu est-il équitable ?

Exercice n°6 (*Examen mai 2024*)

Une urne contient sept boules rouges et trois boules vertes toutes indiscernables au toucher. On extrait simultanément trois boules de l'urne et on observe leurs couleurs.

1) Donner un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ modélisant cette expérience aléatoire.

2) On désigne par A l'évènement « Exactement une des trois boules tirées est verte ». Expliciter A à l'aide du modèle choisi et montrer alors que $\mathbb{P}(A) = \dfrac{63}{120}$.

3) On suppose que chaque boule verte tirée rapporte cinq points et que chaque boule rouge tirée fait perdre deux points.
Soit X la variable aléatoire qui à tout tirage de trois boules fait correspondre le nombre de points gagnés.

a) Trouver la loi de la variable aléatoire X.

b) Montrer que l'espérance mathématique de X est $\mathbb{E}(X) = \dfrac{3}{10}$.

Exercice n°7

On jette dix fois un dé à six faces (non truqué). On note X_i le numéro obtenu au $i$ème jet.

1) Déterminer la loi des variables aléatoires X_i. Calculer $\mathbb{E}(X_i)$ et $Var(X_i)$.

2) On note Y la moyenne des deux premières valeurs obtenues : $Y = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$. Donner la loi de Y, son espérance et sa variance.

3) On pose $M = \max(X_1, \dots, X_{10})$. Calculer $\mathbb{P}([M \leqslant k])$ $(1 \leqslant k \leqslant 6)$ et en déduire la loi de M.

Exercice n°8 $(\star)$

Soit $n \geqslant 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on tire deux boules sans remise. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au plus petit (resp. au plus grand) des deux numéros obtenus.

1) Déterminer la loi de Y puis donner son espérance et sa variance.

2) Déterminer la loi de X.

3) Montrer que les variables aléatoires Y et $n + 1 - X$ ont même loi. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

Exercice n°9

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{U}(\llbracket -3, 3 \rrbracket)$. Déterminer $\mathbb{E}(X^2)$ et $V(X)$. Quelle est la loi de X^2 ?

Exercice n°10

Soit $p \in [0,1]$. Une puce se déplace aléatoirement sur une droite d'origine 0. À chaque instant elle fait un bond d'une unité vers la droite avec une probabilité p ou vers la gauche avec la probabilité $1 - p$. À l'instant initial, la puce est à l'origine. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la position de la puce à l'instant n. Déterminer la loi de X_n ainsi que son espérance.

Exercice n°11

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
Déterminer l'espérance de $U = \max(X, Y)$ et de $V = \min(X, Y)$.

Exercice n°12 $(\star)$

N boules numérotées de 1 à N sont réparties dans deux urnes : M dans la première et $N - M$ dans la seconde. Indépendemment, on tire au hasard un numéro entre 1 et N. On change alors la boule de numéro correspondant d'urne. Combien y a-t-il en moyenne de boules dans la première urne après n mouvements ? Que se passe-t-il lorsque N devient grand ?

Exercice n°13

Soit X une variable aléatoire réelle finie à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction croissante.
Démontrer que $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(f(X))}{f(a)}$.

Exercice n°14

Un urne contient des boules de couleurs différentes, dont une proportion (inconnue) p de blanches. On effectue n tirages avec remise et l'on note S la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

1) Quelles sont la loi, l'espérance et la variance de S ?

2) On suppose que $n = 1000$ et que l'on a tiré 455 fois une boule blanche. Déterminer un « intervalle de confiance (à 98 pour cent) pour p », en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice n°15

On lance n fois un dé non pipé à six faces. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un minorant des valeurs de n pour lesquelles on a plus d'une chance sur deux d'obtenir une fréquence d'apparition de la valeur 1 qui s'écarte de moins de 10^{-2} de la valeur théorique $\frac{1}{6}$.

Exercice n°16

Au R.U., deux légumes sont proposés : haricots verts ou épinards. Les cinq cents clients quotidiens du R.U. choisissent indépendamment les uns des autres les haricots verts avec probabilité 0,5 ou les épinards avec probabilité 0,5.

1) Pour être sûr d'avoir assez de parts de chacun des légumes, combien doit-on en prévoir ?

2) Pour éviter le gaspillage, on décide de prévoir assez de parts pour qu'il y ait moins de une chance sur vingt (soit une probabilité de 0,05) pour que certains étudiants ne puisse pas choisir des épinards. On note S le nombre d'étudiants choisissant les épinards.

a) Quelle loi suit la variable aléatoire S ?

b) Déterminer N pour que $\mathbb{P}([S > N])$ soit inférieur à 0,05 en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice n°17 $(\star)$

1) Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

2) On lance un dé classique non pipé. Déterminer un nombre de lancers à effectuer pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du 6 au cours de ces lancers diffère de $1/6$ d'au plus $0,01$.