Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Feuille d'exercices n°4

Dérivabilité

Exercice n°1

À l'aide uniquement de la définition, donner les points en lesquels la fonction f est dérivable et déterminer alors la fonction dérivée :

$$\textbf{a)} f : x \longmapsto \sqrt{x} \qquad \textbf{b)} f : x \longmapsto x^3 \qquad \textbf{c)} f : x \longmapsto x^{-1}$$

Exercice n°2

En précisant les résultats du cours utilisés, donner la partie D du domaine de définition de f sur laquelle on est sûr que f est dérivable :

$$\textbf{a)} f : x \longmapsto \sqrt{1+x^2} - x \qquad \textbf{b)} f : x \longmapsto \left|x^2 + 3x\right| \qquad \textbf{c)} f : x \longmapsto \frac{x}{\ell n\, x} + \frac{1}{x^2 - 1}$$

Exercice n°3

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les domaines de définition et de dérivabilité puis utiliser les résultats (dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient et d'une composée) pour calculer la dérivée en tout point du domaine de dérivabilité :

$$f_1 : x \longmapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad f_2 : x \longmapsto \ell n\, (\cos x) \qquad f_3 : x \longmapsto \sqrt[3]{\ell n\, (x)}$$
$$f_4 : x \longmapsto x e^{\sin x} \qquad f_5 : x \longmapsto (3 - 2x^2)^{-\frac{3}{4}} \qquad f_6 x :\longmapsto (1 + x^2)^{\cos x}$$

Exercice n°4

Peut-on prolonger par continuité en 0 les fonctions, définies sur $\mathbb{R}^*$, suivantes ? Sont-elles dérivables ? Si oui, la fonction dérivée est-elle continue en 0 ?

$$g_1 : x \longmapsto |x^3| \qquad g_2 : x \longmapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad g_3(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice n°5

Montrer que $f : x \longmapsto x \ell n\, x - x$ est une bijection de $]1, +\infty[$ dans $]-1, +\infty[$. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

Exercice n°6

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Etudier la parité de f' lorsque f est paire ou impaire, ainsi que la réciproque. Si f est périodique, f' l'est-elle ? Etudier la réciproque.

Exercice n°7 ($\star$)

Soit $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui ne s'annule pas sur $]a, b[$. Montrer que si la fonction carrée f^2 est dérivable, il en est de même de f.

Exercice n°8

Étudier la dérivabilité et calculer les dérivées d'ordre n des fonctions numériques suivantes :

$$f_1 : x \longmapsto \frac{1-x}{1+x} \qquad f_2 : x \longmapsto \ell n\,(1+x) \qquad f_3 : x \longmapsto \sin^2 x \qquad f_4 : x \longmapsto x\ell n\, x$$

Exercice n°9

Donner tous les points critiques de $f : x \longmapsto \cos(e^x)$. Combien y en a-t-il dans l'intervalle $[0, 10]$?

Exercice n°10

Déterminer les extrema locaux et globaux de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sur l'intervalle I lorsque :

a) $I =]0, 3]$ et $f : x \longmapsto x + \frac{1}{x}$

b) $I = \mathbb{R}$ et $f : x \longmapsto \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-a|}$ où $a > 0$

c) $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $f : x \longmapsto \dfrac{\cos x}{2 + \sin x}$

d) $I =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ et $f : x \longmapsto x\sqrt{3 - x^2}$

Exercice n°11

Soit $f : x \longmapsto (|x| - 1)^2$. Peut-on appliquer le théorème de Rolle à f sur $[-1, +1]$?

Exercice n°12

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $f : x \longmapsto x^n + px + q$ où p et q sont deux réels fixés. Montrer que la fonction f ne peut avoir plus de trois racines réelles distinctes.

Exercice n°13

Soit n un entier naturel non nul. On suppose que la fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable à l'ordre n. Montrer que, si f s'annule en $n+1$ points distincts de $[a, b]$, alors il existe c dans $]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice n°14

Soit $a = \dfrac{19}{5\sqrt{2} + 7} = 95\sqrt{2} - 133$. Utiliser les fonctions $f : x \longmapsto \dfrac{19}{5x + 7}$ et $g : x \longmapsto 95x - 133$ et le théorème des accroissements finis pour choisir dans quelle expression remplacer $\sqrt{2}$ par 1,41 pour avoir la meilleure approximation de a.

Exercice n°15

Soit $f : x \longmapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Appliquer le théorème des accroissements finis à f sur un intervalle $[a, b]$. Quelle est la valeur de c ? En déduire une propriété géométrique de toute parabole.

Exercice n°16

Démontrer les inégalités suivantes

1) $\forall x > 0 \quad \dfrac{x}{x+1} < \ell n\,(1+x) < x.$ **2)** $\forall x > 0 \quad \arctan x > \dfrac{x}{1+x^2}.$ **3)** $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| \leqslant |x|.$

Exercice n°17 ($\star$)

1) Soit $\alpha > 0$. À l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$,

$$\frac{1}{n^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

2) En déduire que la suite donnée par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$.

Exercice n°18 ($\star$)
En appliquant le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[0,1]$ à la fonction réelle f définie par $f(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{0!}+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ est convergente de limite e.

Exercice n°19

Soient $g : x \longmapsto x^{\frac{x+1}{x}}$ et $f : x \longmapsto g(x)-g(x-1)$. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$.

Exercice n°20 ($\star$)
Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(-1)=f(1)=0$.
Montrer que, pour tout α de $]-1,1[$, il existe un polynôme P de degré $\leqslant 2$ tel que la fonction $g=f+P$ s'annule en -1, 1 et α. En déduire que $f(\alpha)=\frac{\alpha^2-1}{2}f''(c)$ où $c\in]-1,1[$, puis que :

$$\sup_{x\in[-1,1]}|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\sup_{x\in[-1,1]}|f''(x)|$$

Exercice n°21

On définit la fonction f de la variable réelle x par $f(x) = x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) A l'aide de la définition de la dérivée, montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=1$.

3) Peut-on en déduire que f est croissante près de 0 ?

4) Montrer que sur tout intervalle $[-\alpha,\alpha]$ il existe des points où f' vaut 1 et des points où f' vaut -1.

5) Qu'en déduit-on du point de vue de la monotonie de f au voisinage de 0 ?

Exercice n°22

Soit f une fonction réelle de classe C^1 sur le segment $[a,b]$ telle que $f'(a)=f'(b)$. On considère les fonctions F_a et F_b définies sur $[a,b]$ par :

$$F_a(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x\neq a \\ f'(a) & \text{si } x=a \end{cases} \qquad F_b(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} & \text{si } x\neq b \\ f'(b) & \text{si } x=b \end{cases}$$

1) Montrer que F_a et F_b sont continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.

2) Montrer que si $F_a(a)=F_a(b)$, il existe c dans $]a,b[$ tel que : $(*)$ $f'(c)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

3) Dans cette question, on suppose que $F_a(a)\neq F_a(b)=F_b(a)$, et on pose : $h=F_a-F_b$.

a) Montrer que $h(a)\neq 0$ et que $h(a)=-h(b)$.

b) En déduire qu'il existe α dans $]a,b[$ tel que $\dfrac{f(\alpha)-f(a)}{\alpha-a}=\dfrac{f(\alpha)-f(b)}{\alpha-b}$.

c) En déduire que $F_a(\alpha)=F_a(b)$ et qu'il existe c dans $]\alpha,b[$ tel que : $(*)$ $f'(c)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

4) Donner une interprétation géométrique de la relation $(*)$.

Exercice n°23
On considère la fonction f définie sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ par

$$f : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{t}{\sin(t)} \text{ si } t>0, \\ 1 \text{ si } t=0. \end{cases}$$

1) Démontrer que, f est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

2) Démontrer que f est dérivable en 0.

3) Démontrer que, f est de classe C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Exercice n°24 $(\star)$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$ et $f(x) = e^{\frac{-1}{x}}$ pour $x > 0$.
Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x > 0$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{P(x)}{x^{2k}} e^{\frac{-1}{x}}$ où $P(x)$ est un polynôme. En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f^{(k)}(0)$ pour tout k.

Exercice n°25

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f(0) = f'(0) = 0$. On pose $g(x) = \begin{cases} f(\sqrt{x}) & \text{si } x \geqslant 0 \\ f(-\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1) Vérifier que g est de classe C^1 sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

2) Vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g'(x)$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g'(x)$.

4) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur $f''(0)$, pour que g soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°26 $(\star)$

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I d'intérieur non vide et soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$. On suppose $f'(a) < f'(b)$ et on considère $\lambda \in]f'(a), f'(b)[$. Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) - \lambda x$.

1) Justifier l'existence d'un $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = \displaystyle\inf_{x \in [a,b]} g(x)$ et montrer que $c \notin \{a, b\}$.

2) En déduire que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

3) Donner alors un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}$ ne possédant pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°27

1) En étudiant rapidement la fonction $f :]-\infty, 5[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ell n\,(5 - x) - x$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution r. Montrer que $r \in]1, 2[$.

2) Soit $g :]-\infty, 5[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ell n\,(5 - x)$.

a) Montrer que $g([1, 2]) \subset [1, 2]$ et que pour tout x de $[1, 2]$ on a $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{3}$.

b) On pose $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie et converge vers r. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - r| \leqslant \frac{1}{3^n}$.

Exercice n°28

Soit α la racine positive du polynôme $f(x) = x^2 - x - 1$.
On considère l'intervalle $I = [\frac{3}{2}, 2] \subset \mathbb{R}$ et la fonction $\Phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $\Phi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

1) Montrer que Φ est deux fois dérivable et déterminer Φ' et Φ''.

2) Calculer $\Phi(\alpha)$ et $\Phi'(\alpha)$.

3) Montrer que $\Phi(I) \subset I$ et que Φ est contractante sur I.

4) Soit $(v_n)_{n \geqslant 0}$ la suite récurrente définie par $v_0 = \frac{3}{2}$ et $v_{n+1} = \Phi(v_n)$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} v_n = \alpha$.

5) Trouver un indice n tel que $|\alpha - v_n| \leqslant 10^{-3}$.