

## Analyse et Probabilités 2

### Feuille d'exercices n°4

### Dérivabilité

#### Exercice n°1

À l'aide uniquement de la définition, donner les points en lesquels la fonction  $f$  est dérivable et déterminer alors la fonction dérivée :

$$\text{a)} f : x \mapsto \sqrt{x} \qquad \text{b)} f : x \mapsto x^3 \qquad \text{c)} f : x \mapsto x^{-1}$$

#### Exercice n°2

En précisant les résultats du cours utilisés, donner la partie  $D$  du domaine de définition de  $f$  sur laquelle on est sûr que  $f$  est dérivable :

$$\text{a)} f : x \mapsto \sqrt{1+x^2} - x \qquad \text{b)} f : x \mapsto |x^2 + 3x| \qquad \text{c)} f : x \mapsto \frac{x}{\ln x} + \frac{1}{x^2 - 1}$$

#### Exercice n°3

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les domaines de définition et de dérivabilité puis utiliser les résultats (dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient et d'une composée) pour calculer la dérivée en tout point du domaine de dérivabilité :

$$\begin{array}{lll} f_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} & f_2 : x \mapsto \ln(\cos x) & f_3 : x \mapsto \sqrt[3]{\ln(x)} \\ f_4 : x \mapsto x e^{\sin x} & f_5 : x \mapsto (3 - 2x^2)^{-\frac{3}{4}} & f_6 : x \mapsto (1 + x^2)^{\cos x} \end{array}$$

#### Exercice n°4

Peut-on prolonger par continuité en 0 les fonctions, définies sur  $\mathbb{R}^*$ , suivantes ? Sont-elles dérivables ? Si oui, la fonction dérivée est-elle continue en 0 ?

$$g_1 : x \mapsto |x^3| \qquad g_2 : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad g_3(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

#### Exercice n°5

Montrer que  $f : x \mapsto x \ln x - x$  est une bijection de  $]1, +\infty[$  dans  $] -1, +\infty[$ . Montrer que la fonction  $f^{-1}$  est dérivable sur  $] -1, +\infty[$  et expliciter sa dérivée.

#### Exercice n°6

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. Etudier la parité de  $f'$  lorsque  $f$  est paire ou impaire, ainsi que la réciproque. Si  $f$  est périodique,  $f'$  l'est-elle ? Etudier la réciproque.

#### Exercice n°7 (\*)

Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue qui ne s'annule pas sur  $]a, b[$ . Montrer que si la fonction carrée  $f^2$  est dérivable, il en est de même de  $f$ .



**Exercice n°18** (★)

En appliquant le théorème des accroissements finis sur l'intervalle  $[0, 1]$  à la fonction réelle  $f$  définie par  $f(x) = e^{-x} \left( \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right)$ , montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$  est convergente de limite  $e$ .

**Exercice n°19**

Soient  $g : x \mapsto \frac{x+1}{x}$  et  $f : x \mapsto g(x) - g(x-1)$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ .

**Exercice n°20** (★)

Soit  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  telle que  $f(-1) = f(1) = 0$ .

Montrer que, pour tout  $\alpha$  de  $] -1, 1[$ , il existe un polynôme  $P$  de degré  $\leq 2$  tel que la fonction  $g = f + P$  s'annule en  $-1, 1$  et  $\alpha$ . En déduire que  $f(\alpha) = \frac{\alpha^2-1}{2} f''(c)$  où  $c \in ] -1, 1[$ , puis que :

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)| \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in [-1, 1]} |f''(x)|$$

**Exercice n°21**

On définit la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  par  $f(x) = x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ .

- 1) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) A l'aide de la définition de la dérivée, montrer que  $f$  est dérivable en 0 et que  $f'(0) = 1$ .
- 3) Peut-on en déduire que  $f$  est croissante près de 0 ?
- 4) Montrer que sur tout intervalle  $[-\alpha, \alpha]$  il existe des points où  $f'$  vaut 1 et des points où  $f'$  vaut  $-1$ .
- 5) Qu'en déduit-on du point de vue de la monotonie de  $f$  au voisinage de 0 ?

**Exercice n°22**

Soit  $f$  une fonction réelle de classe  $C^1$  sur le segment  $[a, b]$  telle que  $f'(a) = f'(b)$ . On considère les fonctions  $F_a$  et  $F_b$  définies sur  $[a, b]$  par :

$$F_a(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \quad F_b(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} & \text{si } x \neq b \\ f'(b) & \text{si } x = b \end{cases}$$

- 1) Montrer que  $F_a$  et  $F_b$  sont continues sur  $[a, b]$  et dérivables sur  $]a, b[$ .
- 2) Montrer que si  $F_a(a) = F_a(b)$ , il existe  $c$  dans  $]a, b[$  tel que : (\*)  $f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$ .
- 3) Dans cette question, on suppose que  $F_a(a) \neq F_a(b) = F_b(a)$ , et on pose :  $h = F_a - F_b$ .
  - a) Montrer que  $h(a) \neq 0$  et que  $h(a) = -h(b)$ .
  - b) En déduire qu'il existe  $\alpha$  dans  $]a, b[$  tel que  $\frac{f(\alpha) - f(a)}{\alpha - a} = \frac{f(\alpha) - f(b)}{\alpha - b}$ .
  - c) En déduire que  $F_a(\alpha) = F_a(b)$  et qu'il existe  $c$  dans  $]\alpha, b[$  tel que : (\*)  $f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$ .
- 4) Donner une interprétation géométrique de la relation (\*).

**Exercice n°23**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$  par

$$f : t \mapsto \begin{cases} \frac{t}{\sin(t)} & \text{si } t > 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

- 1) Démontrer que,  $f$  est continue sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$ .
- 2) Démontrer que  $f$  est dérivable en 0.
- 3) Démontrer que,  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$ .

**Exercice n°24** (★)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 0$  pour  $x \leq 0$  et  $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$  pour  $x > 0$ .

Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x > 0$ ,  $f^{(k)}(x) = \frac{P(x)}{x^{2k}} e^{-\frac{1}{x}}$  où  $P(x)$  est un polynôme. En déduire que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $f^{(k)}(0)$  pour tout  $k$ .

**Exercice n°25**

Soit  $f$  une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f(0) = f'(0) = 0$ . On pose

$$g(x) = \begin{cases} f(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ f(-\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- 1) Vérifier que  $g$  est de classe  $C^1$  sur chacun des intervalles  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .
- 2) Vérifier que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- 3) Calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g'(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g'(x)$ .
- 4) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur  $f''(0)$ , pour que  $g$  soit de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice n°26** (★)

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  d'intérieur non vide et soit  $(a, b) \in I^2$  avec  $a < b$ . On suppose  $f'(a) < f'(b)$  et on considère  $\lambda \in ]f'(a), f'(b)[$ . Soit  $g$  la fonction définie sur  $I$  par  $g(x) = f(x) - \lambda x$ .

- 1) Justifier l'existence d'un  $c \in [a, b]$  tel que  $g(c) = \inf_{x \in [a, b]} g(x)$  et montrer que  $c \notin \{a, b\}$ .
- 2) En déduire que  $f'$  vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.
- 3) Donner alors un exemple de fonction définie sur  $\mathbb{R}$  ne possédant pas de primitive sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice n°27**

1) En étudiant rapidement la fonction  $f : ]-\infty, 5[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(5-x) - x$ , montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $r$ . Montrer que  $r \in ]1, 2[$ .

2) Soit  $g : ]-\infty, 5[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(5-x)$ .

a) Montrer que  $g([1, 2]) \subset [1, 2]$  et que pour tout  $x$  de  $[1, 2]$  on a  $|g'(x)| \leq \frac{1}{3}$ .

b) On pose  $u_0 = 1$  et, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = g(u_n)$ .

Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie et converge vers  $r$ . Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - r| \leq \frac{1}{3^n}$ .

**Exercice n°28**

Soit  $\alpha$  la racine positive du polynôme  $f(x) = x^2 - x - 1$ .

On considère l'intervalle  $I = [\frac{3}{2}, 2] \subset \mathbb{R}$  et la fonction  $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ .

- 1) Montrer que  $\Phi$  est deux fois dérivable et déterminer  $\Phi'$  et  $\Phi''$ .
- 2) Calculer  $\Phi(\alpha)$  et  $\Phi'(\alpha)$ .
- 3) Montrer que  $\Phi(I) \subset I$  et que  $\Phi$  est contractante sur  $I$ .
- 4) Soit  $(v_n)_{n \geq 0}$  la suite récurrente définie par  $v_0 = \frac{3}{2}$  et  $v_{n+1} = \Phi(v_n)$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \alpha$ .
- 5) Trouver un indice  $n$  tel que  $|\alpha - v_n| \leq 10^{-3}$ .