Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Feuille d'exercices n°3

Limites et continuité

Exercice n°1

Soit $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2024x$. Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Trouver un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in [-1,1] \quad \big(\, |x| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon\big)$$

Qu'en déduit-on ?

Exercice n°2

Soit a un nombre réel. Montrer, en utilisant la définition, que $\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$.

Exercice n°3

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (|x| < 8\delta \Longrightarrow |f(x) - 2| < 3\varepsilon)$$

Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$.

Exercice n°4

1) Montrer que pour tout $0 < \varepsilon < 1$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $|x-1| < \frac{\varepsilon}{4} \Longrightarrow |x^2 + x - 2| < \varepsilon$.

2) En déduire : $\lim\limits_{x\to 1} x^2 + x - 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 + x - 2)\cos x$.

Exercice n°5

1) Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et ℓ un réel. Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x^3) = \ell$.

2) Trouver une partie I de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)$ existe mais $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.

Exercice n°6

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit ℓ un réel. Montrer que :

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2) = \ell \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ell$ **2)** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(-x) = \ell$

Exercice n°7

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{|x^3| - x}{x^3 - |x|}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

Exercice n°8

Étudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} |x| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \lim_{x\to -\infty} \exp(x)\sin(x^2+1) \qquad \lim_{x\to +\infty} \exp(\sin(x) - x) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{3 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Exercice n°9

En utilisant la définition, montrer la continuité de $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice n°10

Montrer que si une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en un point x_0 alors la fonction $|f|$ l'est aussi. Que dire de la réciproque ?

Exercice n°11

Si x est un nombre réel, la partie entière de x, notée $E(x)$, est l'unique entier relatif vérifiant :

$$E(x) \leqslant x < E(x) + 1$$

Étudier la continuité des fonctions : $x \longmapsto E(x)$, $x \longmapsto E(x) + E(2 - x)$, $x \longmapsto E(E(x) - x)$.

Exercice n°12

Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = E(x) + xE(2 - x)$ (E désigne la fonction partie entière).
Montrez que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x)$. f est-elle continue en 1 ?

Exercice n°13

Montrer que la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice n°14

Étudier la continuité des fonctions f et g définies par $f(0) = g(0) = 0$ et pour $x \neq 0$

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad\qquad g(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice n°15

Soit $f : x \longmapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right) + E(x)$. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

Exercice n°16

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit a un réel. On suppose que :

• f est continue sur $[a, +\infty[$ • $f(a) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

On considère alors :

$$\begin{array}{rcl} F : \ ]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f\left(\frac{1}{x} + a - 1\right) \end{array}$$

1) Justifier que F est bien définie et continue sur $]0, 1]$.

2) Montrer que F est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$.

Exercice n°17

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout x de $\mathbb{Q}$, $f(x) = g(x)$. Montrer que $f = g$.

Exercice n°18

Soit k un réel strictement positif et différent de 1.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $f(kx) = f(x)$.
Montrer que si f est continue en 0 alors f est constante.

Exercice n°19

Étudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{x^2} \qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{|2x-7|}{3x+2}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ell n\,(2x^2+1}{3x^2} \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3x+7}}{3x+2\sin x} \qquad \lim_{x\to -2}\frac{\exp(x+2)-1}{x^2+3x+2}$$

Exercice n°20 $(\star)$

Quelles sont les fonctions continues $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout réel x, $f(x^2)=f(x)$?

Exercice n°21 $(\star)$

Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue. On note $E=\{x\in[a,b],\ f(x)=0\}$.
Montrer que si E n'est pas vide, alors $\sup E$ est un élément de E.

Exercice n°22 $(\star)$

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, admettant une période strictement positive t.
Montrer que si f a une limite en $+\infty$, alors f est constante.

Continuité sur un intervalle

Exercice n°23 VRAI ou FAUX ?

Si l'énoncé est vrai, donner une justification. Si l'énoncé est faux, dessiner le graphe d'une fonction contre-exemple. Toutes les fonctions considérées prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$.

1) Si une fonction f est continue sur $[a,b]$, f prend une fois et une seule toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

2) Si une fonction f est continue sur $[a,b]$, f prend au moins une fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

3) Si une fonction f est strictement monotone sur $[a,b]$, f prend une fois et une seule toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

4) Si une fonction f est continue sur $[a,b[$ et bornée, f atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.

5) Si une fonction f est continue et ne s'annule pas sur $[a,b]$, $1/f$ est bornée.

6) L'image d'un intervalle fermé $[a,b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé $[c,d]$.

7) L'image d'un intervalle $]a,b[$ par une fonction continue est un intervalle $]c,d[$.

8) Si l'image de $[a,b]$ par f est un segment, alors f est continue.

9) Si l'image de $[a,b]$ par f n'est pas un segment, alors f n'est pas continue.

10) Si une fonction f est positive sur $[0,+\infty[$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, alors il existe M tel que f soit décroissante sur $[M,+\infty[$.

11) Une fonction continue et croissante sur un segment est injective.

12) Si une fonction f est continue sur $[a,b[$ et bornée, alors f atteint sa borne supérieure ou sa borne inférieure.

Exercice n°24

Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)\neq f(b)$. Montrer que si p et q sont deux réels strictement positifs, il existe c dans $]a,b[$ tel que $pf(a)+qf(b)=(p+q)f(c)$.

Exercice n°25

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe x dans $[0,1]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice n°26

Soit $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(2)$. Montrer que l'équation $f(x) = f(x+1)$ a au moins une solution.

Exercice n°27 $(\star)$

Soit $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que f a une limite finie ℓ en a et b.
Montrer que f n'est pas injective sur $]a,b[$.

Exercice n°28

Montrer que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ est continue, alors elle est constante.

Exercice n°29

Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ une fonction continue ayant pour limite 0 en $+\infty$.
Montrer qu'il existe un réel a positif tel que $f(a) = \sup\limits_{x \geqslant 0} f(x)$.

Exercice n°30

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout x de $[a,b]$, on ait $f(x) > 0$.

1) Montrer qu'il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que, pour tout x de $[a,b]$, on ait $f(x) \geqslant \lambda$.

2) Montrer par des contre-exemples que ce résultat est faux si on remplace $[a,b]$ par un intervalle ouvert ou non borné, ou si f n'est pas continue.

Exercice n°31

Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x > 0$, $|f(x)| < x$.

1) Calculer $f(0)$.

2) Montrer qu'à tout couple (a,b) de réels vérifiant $0 < a < b$, on peut associer un nombre k de $]0,1[$ tel que, pour tout x de $]a,b[$, $|f(x)| < kx$. Est-ce vrai pour les couples $(0,b)$?

Exercice n°32 $(\star)$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant, pour tout couple (x,y), $f(x+y) = f(x) + f(y)$

1) Montrer que pour tout rationnel r et tout réel x, $f(rx) = rf(x)$.

2) En déduire que si f est continue, alors, pour tout réel x, $f(x) = xf(1)$.

3) Montrer que si f est continue en un point a, elle est continue sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer que si f est majorée sur un intervalle $[a,b]$, elle est continue en 0.