

Analyse et Probabilités 2

Feuille d'exercices n°3

Limites et continuité

Exercice n°1

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2024x$. Soit $\varepsilon > 0$ un réel. Trouver un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in [-1, 1] \quad (|x| \leq \delta \implies |f(x)| \leq \varepsilon)$$

Qu'en déduit-on ?

Exercice n°2

Soit a un nombre réel. Montrer, en utilisant la définition, que $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$.

Exercice n°3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (|x| < \delta \implies |f(x) - 2| < 3\varepsilon)$$

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

Exercice n°4

1) Montrer que pour tout $0 < \varepsilon < 1$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{4} \implies |x^2 + x - 2| < \varepsilon$.

2) En déduire : $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x - 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 2) \cos x$.

Exercice n°5

1) Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et ℓ un réel. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow 0} f(x^3) = \ell$.

2) Trouver une partie I de \mathbb{R} et une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2)$ existe mais $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas.

Exercice n°6

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit ℓ un réel. Montrer que :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ell \qquad 2) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow 0^-} f(-x) = \ell$$

Exercice n°7

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{|x^3| - x}{x^3 - |x|}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Exercice n°8

Étudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) \sin(x^2 + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(\sin(x) - c)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Exercice n°9

En utilisant la définition, montrer la continuité de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice n°10

Montrer que si une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en un point x_0 alors la fonction $|f|$ l'est aussi. Que dire de la réciproque ?

Exercice n°11

Si x est un nombre réel, la partie entière de x , notée $E(x)$, est l'unique entier relatif vérifiant :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

Étudier la continuité des fonctions : $x \mapsto E(x)$, $x \mapsto E(x) + E(2 - x)$, $x \mapsto E(E(x) - x)$.

Exercice n°12

Étudier la continuité de la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = E(x) + xE(2 - x)$ (E désigne la fonction partie entière).

Montrez que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$. f est-elle continue en 1 ?

Exercice n°13

Montrer que la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice n°14

Étudier la continuité des fonctions f et g définies par $f(0) = g(0) = 0$ et pour $x \neq 0$

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice n°15

Soit $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right) + E(x)$. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

Exercice n°16

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout x de \mathbb{Q} , $f(x) = g(x)$. Montrer que $f = g$.

Exercice n°17

Soit k un réel strictement positif et différent de 1.

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} telle que, pour tout réel x , $f(kx) = f(x)$.

Montrer que si f est continue en 0 alors f est constante.

Exercice n°18

Étudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 + x^2}}{x^2} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x - 7|}{3x + 2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x^2 + 1)}{3x^2} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 3x + 7}}{3x + 2 \sin x} & \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\exp(x + 2) - 1}{x^2 + 3x + 2} \end{array}$$

Exercice n°19 (*)

Quelles sont les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout réel x , $f(x^2) = f(x)$?

Exercice n°20 (*)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $E = \{x \in [a, b], f(x) = 0\}$.
Montrer que si E n'est pas vide, alors $\sup E$ est un élément de E .

Exercice n°21 (*)

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , admettant une période strictement positive t .
Montrer que si f a une limite en $+\infty$, alors f est constante.

*Continuité sur un intervalle***Exercice n°22** VRAI ou FAUX ?

Si l'énoncé est vrai, donner une justification. Si l'énoncé est faux, dessiner le graphe d'une fonction contre-exemple. Toutes les fonctions considérées prennent leurs valeurs dans \mathbb{R} .

- 1) Si une fonction f est continue sur $[a, b]$, f prend une fois et une seule toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
- 2) Si une fonction f est continue sur $[a, b]$, f prend au moins une fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
- 3) Si une fonction f est strictement monotone sur $[a, b]$, f prend une fois et une seule toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
- 4) Si une fonction f est continue sur $[a, b[$ et bornée, f atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.
- 5) Si une fonction f est continue et ne s'annule pas sur $[a, b]$, $1/f$ est bornée.
- 6) L'image d'un intervalle fermé $[a, b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé $[c, d]$.
- 7) L'image d'un intervalle $]a, b[$ par une fonction continue est un intervalle $]c, d[$.
- 8) Si l'image de $[a, b]$ par f est un segment, alors f est continue.
- 9) Si l'image de $[a, b]$ par f n'est pas un segment, alors f n'est pas continue.
- 10) Si une fonction f est positive sur $[0, +\infty[$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, alors il existe M tel que f soit décroissante sur $[M, +\infty[$.
- 11) Une fonction continue et croissante sur un segment est injective.
- 12) Si une fonction f est continue sur $[a, b[$ et bornée, alors f atteint sa borne supérieure ou sa borne inférieure.

Exercice n°23

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) \neq f(b)$. Montrer que si p et q sont deux réels strictement positifs, il existe c dans $]a, b[$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c)$.

Exercice n°24

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe x dans $[0, 1]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice n°25

Soit $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(2)$. Montrer que l'équation $f(x) = f(x + 1)$ a au moins une solution.

Exercice n°26 (*)

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que f a une limite finie ℓ en a et b .
Montrer que f n'est pas injective sur $]a, b[$.

Exercice n°27

Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ est continue, alors elle est constante.

Exercice n°28

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue ayant pour limite 0 en $+\infty$.

Montrer qu'il existe un réel a positif tel que $f(a) = \sup_{x \geq 0} f(x)$.

Exercice n°29

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout x de $[a, b]$, on ait $f(x) > 0$.

- 1) Montrer qu'il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que, pour tout x de $[a, b]$, on ait $f(x) \geq \lambda$.
- 2) Montrer par des contre-exemples que ce résultat est faux si on remplace $[a, b]$ par un intervalle ouvert ou non borné, ou si f n'est pas continue.

Exercice n°30

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x > 0$, $|f(x)| < x$.

- 1) Calculer $f(0)$.
- 2) Montrer qu'à tout couple (a, b) de réels vérifiant $0 < a < b$, on peut associer un nombre k de $]0, 1[$ tel que, pour tout x de $]a, b[$, $|f(x)| < kx$. Est-ce vrai pour les couples $(0, b)$?

Exercice n°31 (*)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant, pour tout couple (x, y) , $f(x + y) = f(x) + f(y)$

- 1) Montrer que pour tout rationnel r et tout réel x , $f(rx) = rf(x)$.
- 2) En déduire que si f est continue, alors, pour tout réel x , $f(x) = xf(1)$.
- 3) Montrer que si f est continue en un point a , elle est continue sur \mathbb{R} .
- 4) Montrer que si f est majorée sur un intervalle $[a, b]$, elle est continue en 0.