Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Feuille d'exercices n°2

Probabilités sur un univers fini

Notion de probabilité

Exercice n°1

A, B et C désignent trois évènements correspondants à une même expérience aléatoire. Exprimer à l'aide de A, B et C les faits :

1) aucun évènement n'est réalisé **2)** au plus deux le sont **3)** au moins un l'est
4) exactement un l'est **5)** A et B le sont mais pas C **6)** ni A ni B ne le sont

Exercice n°2

On considère un ensemble de 100 pièces dont 7 sont rouges et les autres d'autres couleurs. Les 100 pièces sont indistinguables les unes des autres au toucher.

1) On tire au hasard une pièce parmi les 100.
Donner un espace probabilisé fini $(\Omega_1, \mathscr{P}(\Omega_1), \mathbb{P}_1)$ qui modélise cette expérience.
On note C l'évènement : « on obtient une pièce rouge ». Déterminer $\mathbb{P}_1(C)$.

2) On tire au hasard et simultanément deux pièces parmi les 100.
Donner un espace probabilisé fini $(\Omega_2, \mathscr{P}(\Omega_2), \mathbb{P}_2)$ qui modélise cette expérience.
On note A l'évènement : « on obtient au moins une pièce rouge ».
Décrire l'événement contraire A^c et en déduire $\mathbb{P}_2(A)$.

Exercice n°3

Une urne contient vingt boules indiscernables au toucher : huit boules rouges, trois blanches et neuf bleues. On tire au hasard et simultanément trois de ces boules et on observe leurs couleurs.

1) Donner, en le justifiant, un univers fini Ω et une probabilité $\mathbb{P}$ qui modélisent cette expérience.

2) On note A l'évènement « On obtient au moins une boule blanche ». Décrire l'évènement contraire $\overline{A}$ à l'aide du modèle de la question précédente. En déduire la probabilité de A.

3) On note B l'évènement « On obtient une boule de chaque couleur ». Calculer la probabilité de B.

Exercice n°4

On lance six dés à six faces parfaitement équilibrés et l'on observe les différents chiffres obtenus.

1) Modéliser l'expérience.

2) Soit A l'évènement : « On n'a obtenu aucun 6 ». Décrire l'évènement A à l'aide du modèle de la question précédente. En déduire la probabilité d'obtenir au moins un 6.

3) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois 6 et trois 2 ?

Exercice n°5

Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).

1) On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Modéliser l'expérience puis calculer les probabilités :

a) De ne tirer que 3 jetons verts ; **b)** De ne tirer aucun jeton vert ;
c) De tirer au plus 2 jetons verts ; **d)** De tirer exactement 1 jeton vert.

2) Reprendre les mêmes questions dans le cas d'un tirage simultané de 3 jetons.

Exercice n°6

Une classe comporte 10 garçons dont la moitié ont les yeux marron et 20 filles dont la moitié ont les yeux marron. Calculer la probabilité pour qu'une personne tirée au hasard soit un garçon ou ait les yeux marron.

Exercice n°7

On tire au hasard deux cartes d'un jeu ordinaire de 52 cartes. Calculer la probabilité que

1) les deux cartes soient des piques,

2) une carte soit un pique et l'autre un coeur.

Exercice n°8

On prend au hasard trois ampoules électriques dans un lot de 15 ampoules dont 5 sont défectueuses.
Calculer la probabilité que :
1) aucune ne soit défectueuse, **2)** exactement une soit défectueuse, **3)** au moins une soit défectueuse.

Exercice n°9

On choisit deux cartes au hasard parmi dix cartes numérotées de 1 à 10. Calculer la probabilité pour que la somme des deux nombres associés aux deux cartes tirées soit impaire, dans le cas :
1) d'un tirage simultané, **2)** d'un tirage successif sans remise, **3)** d'un tirage successif avec remise.

Exercice n°10

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,80]$.

Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.

Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Partie A : expérience 1

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0,12 + 0,004x$.
2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.

Partie B : expérience 2

On tire au hasard simultanément 3 cubes de l'urne. Les résultats seront arrondis au millième.

1. Quelle est la probabilité de tirer au moins un cube rouge ?
2. Quelle est la probabilité que les cubes tirés soient de la même couleur ?
3. Quelle est la probabilité de tirer exactement un cube marqué d'un cercle ?

Exercice n°11

Vrai ou Faux ?

1) On considère une urne contenant n boules rouges et trois boules noires, où n désigne un entier naturel non nul. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules dans l'urne.

Affirmation : il existe une valeur de n pour laquelle la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est égale à $\dfrac{9}{22}$.

2) Une urne contient au total n boules dont cinq sont blanches et les autres noires.

On effectue 10 tirages successifs indépendants en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.

Affirmation : la plus petite valeur de l'entier n, pour laquelle la probabilité d'obtenir au moins une boule noire sur les 10 tirages est supérieure ou égale à $0,9999$, est égale à 13.

Exercice n°12

On considère un questionnaire comportant cinq questions. Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A, B et C), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot « $BBAAC$ » signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1) Combien y a-t-il de mots-réponses possible à ce questionnaire ?

2) On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

Calculer la probabilité des évènements suivants : E : « le candidat a exactement une réponse exacte », F : « le candidat n'a aucune réponse exacte » et G : « le mot-réponse du candidat est un palindrome ». (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, « $BACAB$ » est un palindrome.)

Probabilités conditionnelles

Exercice n°13 VRAI ou FAUX

Si A et B sont deux évènements tels que $\mathbb{P}(A) \notin \{0,1\}$ alors $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$.

Exercice n°14

On dispose de trois cartes à deux faces. La première a deux faces blanches, la deuxième deux faces noires et la dernière une face blanche et une noire. On tire au hasard une carte. La face visible est noire. Quelle est la probabilité que l'autre face soit noire ?

Exercice n°15

On jette deux dés non pipés. Calculer la probabilité pour que la somme soit supérieure à 5 sachant :

1) que le premier dé a donné 4, **2)** au moins l'un des dés a donné 4.

Exercice n°16

On jette trois pièces de monnaie non truquées. Calculer la probabilité pour que toutes les pièces donnent face sachant que l'une au moins des pièces donne face.

Exercice n°17

On lance deux dés parfaitement équilibrés. Sachant que les deux chiffres obtenus sont différents, calculer la probabilité pour que :

1) la somme obtenue soit six, **2)** un 1 apparaisse, **3)** la somme obtenue soit inférieure ou égale à 4.

Exercice n°18

On tire au hasard deux chiffres entre 1 et 9. Sachant que la somme obtenue est paire, calculer la probabilité pour que les deux chiffres soient impairs.

Exercice n°19

Un seigneur lassé de son astrologue et de ses vaines promesses décide de le faire exécuter. Bon prince, il lui laisse une dernière chance. L'astrologue est autorisé à répartir 4 boules (2 blanches et 2 noires) dans 2 urnes (au moins une boule par urne). Le bourreau choisira alors une urne et en tirera une boule. Si celle-ci est noire, l'astrologue sera exécuté. Comment ce dernier doit-il disposer ses boules dans les urnes pour s'assurer le maximum de chances de survie ?

Exercice n°20

Un industriel fait appel à deux sous-traitants A et B pour fabriquer une pièce. A fournit 75% des pièces et B 25%. Le pourcentage des pièces défectueuses est deux fois plus important pour les pièces livrées par B que pour celles livrées par A. L'industriel voyant une pièce défectueuse dont il ignore l'origine dit « Je parie qu'elle vient de chez B ». Qu'en pensez-vous ?

Exercice n°21

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 5 pour mille de ce cheptel. Des études statistiques ont montré que la probabilité pour un animal d'avoir un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8 et que celle d'avoir un test négatif sachant qu'il n'est pas atteint par la maladie est 0,9. On note : T l'évènement « avoir un test positif à cette maladie » M l'évènement « être malade » et N l'évènement contraire de l'évènement M.

1) Calculer la probabilité pour un animal d'avoir un test positif à cette maladie.

2) Calculer la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif. On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible. Que peut-on conclure sur la fiabilité du test ?

Exercice n°22 *($\star$)*

On lance un dé non truqué. Si le résultat est n, on tire au hasard n cartes simultanément dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de tirer le huit de coeur ? Les quatre rois ?

Exercice n°23

Des études statistiques montrent que 6% des individus d'une population souffrent d'une maladie donnée. Un test est utilisé pour diagnostiquer la maladie considérée. On a établi statistiquement que :

- sachant qu'un individu est malade, la probabilité qu'il ait un test positif est 0,95 ;
- sachant qu'un individu n'est pas malade, la probabilité qu'il ait un test négatif est 0,97.

On désignera par M l'évènement « être malade », par T l'évènement « avoir un test positif ».

1) Calculer la probabilité de T.

2) Quelle est la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit malade ?

Exercice n°24

On considère un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Soient A et B deux évènements avec $\mathbb{P}(B) \notin \{0, 1\}$. Démontrer que :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A).\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A).\mathbb{P}(\overline{B})$$

Exercice n°25

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
Montrer que si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ sont indépendants alors A et B^c le sont aussi.

Exercice n°26

Un même individu peut être atteint de surdité unilatérale (portant sur une seule oreille) ou bilatérale (portant sur les deux oreilles). On admet que, dans une population donnée, les deux évènements : D : « être atteint de surdité à l'oreille droite » et G : « être atteint de surdité à l'oreille gauche » sont indépendants et tous les deux de probabilité 0,05. On considère les évènements suivants : B : « être atteint de surdité bilatérale » U : « être atteint de surdité unilatérale » et S : « être atteint de surdité (sur une oreille au moins) ».

1) Exprimer les évènements B et S à l'aide de G et D, puis calculer les probabilités $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(S)$. En déduire la probabilité de U.

2) Sachant qu'un sujet pris au hasard dans la population considérée est atteint de surdité, quelle est la probabilité : **a)** qu'il soit atteint de surdité à droite ? **b)** qu'il soit atteint de surdité bilatérale ?

Exercice n°27

On jette deux fois une pièce équilibrée. On considère les évènements correspondant respectivement à l'obtention de : A : « pile la première fois », B : « face la deuxième fois » et C : « deux fois le même côté de la pièce ». Etudier l'indépendance des évènements :

a) A et B **b)** B et C. **c)** C et A. **d)** A, B et C.

Exercice n°28

On jette un dé équilibré. On considère les évènements correspondant respectivement à l'obtention d'un nombre : A : « inférieur ou égal à 3 », B : « pair » et C : « 1, 2, 4 ou 5 ».
Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$. Les évènements A, B et C sont-ils indépendants ?

Exercice n°29 VRAI ou FAUX

A et B sont deux évènements tels que $\mathbb{P}(A) = 0,2$, $\mathbb{P}_A(B) = 0,3$ et $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,56$.
PROPOSITION : *les évènements A et B sont indépendants.*

Variables aléatoires

Exercice n°30

On lance deux fois un dé équilibré à 6 faces et on observe les deux nombres obtenus.

1) Décrire l'univers et plus précisément la modélisation associée à cette expérience.

2) On considère la variable aléatoire associée à la somme des chiffres obtenus. Donner la loi de cette variable.

Exercice n°31

On choisit au hasard un nombre entier entre 15 et 25. On note S la somme des chiffres de ce nombre. Déterminer la loi de la variable aléatoire S.

Exercice n°32

On lance deux dés parfaitement équilibrés et on observe les numéros obtenus. On note X la variable aléatoire donnant le plus petit des numéros obtenus. Déterminer la loi de X.

Exercice n°33

Un joueur tire sur une cible de 10 cm de rayon, constituée de couronnes concentriques, délimitées par des cercles de rayons 1,2, ..., 10 cm, et numérotées respectivement de 10 à 1. La probabilité d'atteindre la couronne k est proportionnelle à l'aire de cette couronne, et on suppose que le joueur atteint sa cible à chaque lancer. Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le numéro de la couronne touchée. Déterminer la loi de X.

Exercice n°34

Une boîte contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et n boules jaunes où n est un entier supérieur ou égal à 2. On tire simultanément 2 boules de la boîte et on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1) Calculer en fonction de n les probabilités $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$ des évènements A : « obtenir deux boules de même couleur » et B : « obtenir deux boules de couleurs différentes »

2) Dans cette question n vaut 7. On répète dix fois l'expérience en remettant dans la boîte, après chaque tirage, les deux boules tirées. Soit X le nombre de fois où l'évènement A est réalisé au cours de ces dix répétitions. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice n°35

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On effectue des tirages au hasard dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant ensuite remise dans l'urne. On note N la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

1) Déterminer $N(\Omega)$.

2) Démontrer que : $\forall k \in \{1, \cdots, n\} \quad \mathbb{P}([N \geqslant k+1]) = \dfrac{A_n^k}{n^k}$ où $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

3) En déduire $\mathbb{P}([N = k])$ (on distinguera les cas $k \leqslant n$ et $k = n+1$)

Exercice n°36

Des études statistiques montrent que 6% des individus d'une population souffrent d'une maladie donnée. On considère un échantillon pris au hasard de 100 personnes de la population, cette dernière étant suffisamment grande pour que l'on puisse assimiler le choix de l'échantillon à 100 choix indépendants d'une personne. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes malades de l'échantillon.

1) Soit k un nombre entier compris entre 0 et 100. Exprimer en fonction de k la probabilité de l'évènement $[X = k]$.

2) Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de la probabilité qu'il n'y ait aucun malade dans l'échantillon.

Exercice n°37

On dispose de deux urnes : la première contient deux boules numérotées 5, trois boules numérotées 4 et une numérotée 2 ; la deuxième contient trois boules numérotées 4 et deux numérotées 3.
On tire au hasard une boule de la première urne puis une boule de la deuxième. Soit X la somme des deux numéros obtenus.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) On gagne lorsque la somme obtenue est supérieure ou égale à 8. Quelle est la probabilité de gagner ?

3) On répète trois fois l'épreuve précédente. Quelle est la probabilité de gagner au moins une fois ?

4) Combien de fois faut-il répéter cette épreuve pour que la probabilité de gagner au moins une fois soit au moins de 0,995 ?

Exercice n°38

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = n - X$?

Exercice n°39

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Quelle est la valeur la plus probable prise par X ?

Exercice n°40

On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \cdots, X_n$ toutes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $S = X_1 + \cdots + X_n$.

1) Déterminer, pour $i \in [\![1, n]\!]$, la loi de $Y_i = \dfrac{X_i + 1}{2}$.

2) En déduire la loi de S.