Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Feuille d'exercices n°1 : quelques corrigés

Exercice n°6

1) Un nombre de quatre chiffres peut être vu comme une liste de 4 chiffres (par exemple, le nombre 2542 est vu comme (2,5,4,2)). En notant $C = \{0, 1, \cdots, 9\}$ l'ensemble des chiffres, un nombre à quatre chiffres est alors un élément de $C \times C \times C \times C = C^4$. L'ensemble des nombres à quatre chiffres, le premier n'étant pas 0 est alors $A = C\backslash\{0\} \times C \times C \times C$ et il y a donc $\text{Card}(C\backslash\{0\}).\text{Card}(C)^3 = 9\,000$ tels nombres.

2) a) Les nombres de quatre chiffres distincts (qui forment un ensemble D) sont les 4-arrangements d'éléments de C. Il y en a donc $\text{Card}(D) = A_{10}^4$. Parmi ces nombres, ceux dont le premier chiffre est 0 (qui forment un ensemble D_0) sont tous ceux de la forme $(0, a, b, c)$ où (a, b, c) est un 3-arrangement de C. Il y en a donc $\text{Card}(D_0) = A_{10}^3$. Les nombres cherchés sont ceux de $D' = D\backslash D_0$. Il y en a donc $\text{Card}(D\backslash D_0) = \text{Card}(D) - \text{Card}(D_0)$ soit $A_{10}^4 - A_{10}^3 = 9 \times 9 \times 8 \times 7$ nombres.

b) Les nombres cherchés sont ceux de $A\backslash D'$. Il y en a donc $\text{Card}(A) - \text{Card}(A') = 9000 - 4536 = 4464$.

c) Les nombres de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7 sont les 4-arrangements d'éléments de $C\backslash\{5, 7\}$. De même qu'en a), il y a donc $A_8^4 - A_8^3 = 7 \times 7 \times 6 \times 5$ nombres de A (donc ne commençant pas par 0) composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7.

Exercice n°11

On voit un jury comme un couple $(\{f_1, f_2\}, \{h_1, h_2, h_3\})$ où $\{f_1, f_2\}$ est une partie à deux éléments de l'ensemble des 5 femmes et $\{h_1, h_2, h_3\}$ est une partie à trois éléments de l'ensemble des 7 hommes. Il y a donc autant de jurys que d'éléments dans $F \times H$ où F est l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble des 5 femmes et H est l'ensemble des parties à trois éléments de l'ensemble des 7 hommes. Le nombre de jurys possibles est donc $\text{Card}(F \times H) = \text{Card}(F) \times \text{Card}(H) = \binom{5}{2}\binom{7}{3}$ soit $10 \times 35 = 350$ jurys.

Exercice n°14

1) Une main est une partie à 5 éléments (une 5-combinaison) de l'ensemble C des 52 cartes. L'ensemble $\mathscr{M}$ des mains est donc de cardinal $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

2) Une main comportant exactement un as peut être vue comme un couple formé d'un as et d'une partie à quatre éléments de l'ensemble des cartes qui ne sont pas des as. En notant $A = \{AP, AC, AK, AT\}$ l'ensemble des as, l'ensemble des telles mains est alors (avec les notations du cours) $A \times \mathscr{C}_4(C\backslash A)$. Il y a donc $\text{Card}(A).\text{Card}(\mathscr{C}_4(C\backslash A)) = 4 \times \binom{48}{4}$ soit $778\,320$ telles mains.

3) *Remarque : Il peut être tentant de proposer une solution de la forme : « On choisit un valet parmi les 4 puis quatre autres cartes (parmi les 51 qui restent). Il y a donc $\binom{4}{1} \times \binom{51}{4} = 999\,600$ telles mains.*
La formalisation insuffisante de cette réponse (qui est fausse !) cache une erreur classique : on compte plusieurs fois certaines mains…
Il est ici beaucoup plus facile de passer par le complémentaire. Si on note $\mathscr{V}$ l'ensembles des mains comportant au moins un valet, $\overline{\mathscr{V}}$ est l'ensemble des mains qui ne contiennent aucun valet donc l'ensemble des 5-combinaisons de l'ensemble des 48 cartes qui ne sont pas des valets.
On a donc $\text{Card}(\mathscr{V}) = \text{Card}(\mathscr{M}) - \text{Card}(\overline{\mathscr{V}}) = \binom{52}{5} - \binom{48}{5}$ soit $886\,656$ telles mains.

Exercice n°18

1) En voyant un mot de sept lettres comme un 7-uple de lettres, un anagramme du mot PATRICE est un 7-arrangement de l'ensemble des sept lettres. Il y en a donc $A_7^7 = 7!$ (nombre de permutations des lettres).

3) Notons $\mathscr{A}$ l'ensemble des anagrammes du mot ANAGRAMME (en voyant un mot de neuf lettres comme un 9-uple de lettres). On partitionne l'ensemble $\mathscr{A}$ en regroupant les mots comportant les lettres A en même position. On a alors :
$\mathscr{A} = \bigcup_{I \subset [\![1,9]\!],\, \mathrm{Card}(I)=3} \mathscr{A}_I$ où, pour $I = \{i,j,k\} \subset [\![1,9]\!]$, $\mathscr{A}_I = \{(a_1, \cdots, a_9) \in \mathscr{A},\ a_i = a_j = a_k = A\}$.
La réunion étant clairement disjointe, $\mathrm{Card}(\mathscr{A}) = \sum_{I \subset [\![1,9]\!],\, \mathrm{Card}(I)=3} \mathrm{Card}(\mathscr{A}_I) = \binom{9}{3} \mathrm{Card}(\mathscr{A}_{\{1,2,3\}})$ car tous les $\mathscr{A}_I$ ont même cardinal. Or $\mathscr{A}_{\{1,2,3\}} = \{(A, A, A, a_4, \cdots, a_9) \in \mathscr{A}\}$ est en bijection avec l'ensemble $\mathscr{A}'$ des anagrammes de NGRMME. Le même raisonnement montre que $\mathrm{Card}(\mathscr{A}') = \binom{6}{2} \mathrm{Card}(\mathscr{A}'_{\{1,2\}})$ où $\mathscr{A}'_{\{1,2\}} = \{(M, M, a_3, \cdots, a_6) \in \mathscr{A}'\}$ est en bijection avec l'ensemble des anagrammes de NGRE.
Au final, $\mathrm{Card}(\mathscr{A}) = \binom{9}{3}\binom{6}{2} 4! = \frac{9!}{3!2!}$.
Remarque : On peut démontrer de même que le nombre d'anagrammes d'un mot de n lettres comportant n_A fois A, $\ldots$,n_Z fois Z est (toujours avec la convention $0! = 1$) :

$$\frac{n!}{n_A! n_B! \cdots n_Z!}$$