

## Analyse et Probabilités 2

### Feuille d'exercices n°1

### *Dénombrement*

#### **Exercice n°1** (*Exercice du cours*)

Montrer que deux ensembles finis sont en bijection si et seulement s'ils ont même cardinal.

#### **Exercice n°2**

On se donne deux parties  $A$  et  $B$  d'un ensemble fini  $E$ .

- 1) Montrer que  $\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)$ .
- 2) On pose :  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ . Montrer que  $\text{Card}(A \Delta B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - 2\text{Card}(A \cap B)$ .

#### **Exercice n°3**

De combien de manières différentes un professeur peut-il choisir un ou plusieurs étudiants parmi six ?

#### **Exercice n°4** (\*)

Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments, et  $A \subset E$  un sous-ensemble à  $p$  éléments. Quel est le nombre de parties de  $E$  qui contiennent un et un seul élément de  $A$  ?

#### **Exercice n°5**

Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ?

#### **Exercice n°6**

Soit  $A$  l'ensemble des nombres de quatre chiffres, le premier de ces chiffres n'étant pas 0.

- 1) Calculer le nombre d'éléments de  $A$ .
- 2) Dénombrer les éléments de  $A$  :
  - a) composés de quatre chiffres distincts.
  - b) composés d'au moins deux chiffres identiques.
  - c) composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7

#### **Exercice n°7**

Un clavier de neuf touches (1;2;3;4;5;6;A;B;C) permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de trois chiffres distincts ou non.

- 1) Combien de codes différents peut-on former ?
- 2) Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
- 3) Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
- 4) Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?
- 5) Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

**Exercice n°8**

Combien de mots de 10 lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet si

- 1) on utilise chaque lettre une seule fois,
- 2) on peut réutiliser les lettres.

**Exercice n°9**

De combien de manières différentes peut-on former un jury de 3 hommes et 2 femmes parmi 7 hommes et 5 femmes ?

**Exercice n°10**

À l'oral d'un examen, un étudiant doit répondre à 8 questions sur un total de 10.

- 1) Combien de choix possibles y a-t-il ?
- 2) Combien de choix a-t-il s'il doit répondre aux trois premières questions ?
- 3) Et s'il doit répondre au moins à 4 des 5 premières questions ?

**Exercice n°11**

Déterminer le nombre de mots distincts que l'on peut former avec 6 voyelles et 20 consonnes, chaque mot étant composé de 3 consonnes et 2 voyelles, en excluant les mots qui renferment 3 consonnes consécutives.

**Exercice n°12**

On considère les « mains » de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 52 cartes.

- 1) Combien y a-t-il de mains différentes ?
- 2) Combien y a-t-il de mains comprenant exactement un as ?
- 3) Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un valet ?

**Exercice n°13**

Pour une course de 18 chevaux au départ, combien y a-t-il de tiercés possibles ?

**Exercice n°14** (★)

On doit placer autour d'une table ronde un groupe de  $2n$  personnes,  $n$  hommes et  $n$  femmes, qui constituent  $n$  couples. Combien existe-t-il de dispositions (des personnes les unes par rapport aux autres)...

- 1) au total ?
- 2) en respectant l'alternance des sexes ?
- 3) sans séparer les couples ?
- 4) en remplissant les deux conditions précédentes ?

**Exercice n°15**

En utilisant trois méthodes différentes, dénombrer le nombre de poignées de mains échangées, dans un groupe de 13 personnes, si chacune échange une poignée de main avec toutes les autres ?

### **Exercice n°16**

- 1) Dénombrer les anagrammes du mot PATRICE.
- 2) Dans chacun des cas suivants, dénombrer les anagrammes du mot PATRICE :
  - a) commençant et finissant par une consonne ;
  - b) commençant et finissant par une voyelle ;
  - c) commençant par une consonne et finissant par une voyelle
  - d) commençant par une voyelle et finissant par une consonne
- 3) Quel est le nombre d'anagrammes du mot « ANAGRAMME » ?

### **Exercice n°17**

Un quatuor pour piano est un ensemble musical composé d'un piano et d'un trio à cordes : violon, alto et violoncelle.

Lako, Marine, Nollhan et Thomas veulent former un quatuor avec piano.

- 1) Si les quatre savent jouer des quatre instruments, combien ont-ils de façons de former ce quatuor ?
- 2) Quel est le nombre de possibilités si Lako et Nollhan savent jouer des quatre instruments mais Marine et Thomas ne jouent que de l'alto ou du violoncelle ?

### **Exercice n°18**

Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10, indiscernables au toucher. On tire 3 jetons simultanément. Combien de tirages différents peut-on faire contenant au moins un jeton de numéro pair ?

### **Exercice n°19**

Un code inconnu est constitué de 8 signes. Chaque signe peut être une lettre ou un chiffre. Il y a donc 36 signes utilisables pour chacune des positions. Un logiciel de cassage de code teste environ cent millions de codes par seconde. En combien de temps au maximum le logiciel peut-il découvrir le code ?

### **Exercice n°20**

La façade d'une maison compte 8 fenêtres, ces fenêtres peuvent être soit ouvertes soit fermées.

- 1) De combien de manières différentes peut se présenter cette façade ?
- 2) Même question si on considère que chaque fenêtre a deux battants ?
- 3) Qu'en est-il si la première fenêtre est toujours ouverte et la 6e toujours fermée (fenêtres complètes, on oublie les battants).

### **Exercice n°21**

Dans un groupe il y a 10 hommes, 8 femmes et 7 enfants. De combien de manières différentes peut-on les placer sur une ligne si

- 1) ils peuvent se placer librement ?
- 2) Les hommes désirent rester groupés ?

### **Exercice n°22**

Une maîtresse de maison a onze amis très proches. Elle souhaite en inviter cinq à dîner.

- 1) Combien de groupes différents d'invités y a-t-il ?
- 2) Combien de possibilités y a-t-il si deux d'entre eux sont mariés et ne peuvent venir qu'ensemble ?
- 3) Combien de possibilités y a-t-il si deux d'entre eux sont en mauvais terme et ne peuvent pas être invités ensemble ?

**Exercice n°23**

On extrait simultanément 5 cartes d'un jeu de 32. Cet ensemble de 5 cartes est appelé une « main ».

- 1) Combien y a-t-il de mains différentes ?
- 2) Dénombrer les mains de 5 cartes contenant :
  - a) un carré
  - b) deux paires distinctes
  - c) un full (trois cartes de même valeur, et deux autres de même valeur. Exemple : 3 rois et 2 as)
  - d) un brelan (trois cartes de même valeur, sans full ni carré)
  - e) une quinte (5 cartes de même couleur, se suivant dans l'ordre croissant)