Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Corrigé rapide du test n°3 (Durée : 20 min)

Question de cours

Soit f une fonction réelle définie et continue sur le segment $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ (avec $a<b$). Si $f(a)=f(b)$, alors il existe c appartenant à $]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

1 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ $(a<b)$. Soit $k\in\mathbb{R}$. On peut alors affirmer que :

A. f s'annule un nombre fini de fois sur $[a,b]$.

B. Si $f(a)f(b)<0$ et si f est croissante sur $[a,b]$ alors f s'annule une unique fois sur $[a,b]$.

C. Si $f(a)f(b)<0$ et si f n'est pas strictement monotone sur $[a,b]$ alors f s'annule au moins deux fois sur $[a,b]$.

D. Aucune des réponses précédentes.

A. Faux. On a $f : x \longmapsto x\cos(\frac{1}{x})$ (prolongée par $f(0)=0$) est continue sur $[0,1]$ et s'annule une infinité de fois sur $[0,1]$.
B. Faux. Un contre-exemple est f définie sur $[-2,2]$ par $f(x)=x$ si $x\in[-2,0]$, $f(x)=0$ si $x\in[0,1]$ et $f(x)=x-1$ si $x\in[1,2]$.
C. Faux. Un contre-exemple est f définie sur $[-2,2]$ par $f(x)=2x$ si $x\in[-2,1]$ et $f(x)=3-x$ si $x\in[1,2]$.
D. Exact. En conséquence...

2 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=x^2e^{-x}$. On a alors, pour tout réel x,

A. $f''(x)=(x^2-4x+2)e^{-x}$

B. $\forall n\in\mathbb{N}\quad f^{(n)}(x)=(-1)^n(x^2-2nx+n)e^{-x}$

C. $f''(x)=2e^{-x}$

D. $\forall n\in\mathbb{N}\quad f^{(n)}(x)=(-1)^n(x^2-2nx+n^2-n)e^{-x}$

En effet, pour tout réel x on a $f'(x)=(2x-x^2)e^{-x}$ puis $f''(x)=(x^2-4x+2)e^{-x}$. Un récurrence facile conduit alors à $\forall n\in\mathbb{N}\quad f^{(n)}(x)=(-1)^n(x^2-2nx+n^2-n)e^{-x}$.

$\boxed{3}$ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On peut alors affirmer que :

A. Si f' n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$ alors f n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

B. Si f' est strictement négative sur $\mathbb{R}$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

C. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors $h : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^*$.

D. Si $g : x \longmapsto f(x) - x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.

A. Faux. La fonction $f : x \longmapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée s'annule en 0.

B. Exact. C'est un résultat du cours.

C. Faux. La fonction $f : x \longmapsto x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$ mais $h : x \longmapsto x^2$ n'est pas croissante sur $]-\infty, 0[$.

D. Exact. g est dérivable et croissante donc $\forall x,\ g'(x) = f'(x) - 1 \geqslant 0$. On a donc $\forall x,\ f'(x) \geqslant 1 \geqslant 0$ et f est bien croissante.

$\boxed{4}$ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. On fixe un réel $k \notin [a,b]$ et on considère la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x-k}$. On est alors sûr que :

A. g est dérivable sur $]a,b[$ et on a : $\forall x \in [a,b],\ g'(x) = \dfrac{f'(x)}{(x-k)^2}$.

B. $\exists c \in]a,b[\quad f'(c) = \dfrac{f(c)}{c-k}$.

C. $\exists c \in]a,b[\quad f'(c) = 1$.

D. Aucune des réponses précédentes.

A. Faux. On a $g'(x) = \dfrac{f'(x).(x-k) - f(x)}{(x-k)^2}$.

B. Exact. g est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $g(a) = g(b) = 0$ donc (théorème de Rolle) : $\exists c \in]a,b[\quad g'(c) = 0$ ce qui donne $f'(c).(c-k) - f(c) = 0$.

C. Faux. La fonction nulle est un contre-exemple.

D. Faux. D'après B...

$\boxed{5}$ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par l'expression ci-dessous. En posant $f(0) = 1$, on prolonge f en une fonction de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$ lorsque :

A. $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = 2 + \exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)$

B. $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \dfrac{\ell n\,(1+x)}{x}$

C. $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \dfrac{\exp(x^2) - 1}{x}$

D. $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \dfrac{\cos(x) - 1}{x}$

A. Faux. En effet, $\lim_{x\to 0} f(x) = 2 \neq f(0)$: f n'est pas continue en 0.

B. Exact. Cela résulte du théorème de la limite de la dérivée puisque $\forall x > -1, f'(x) = \dfrac{\frac{x}{1+x} - \ell n\,(1+x)}{x^2}$ donc $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\dfrac{1}{2}$ par la règle de L'Hospital (puisque $\dfrac{1}{(1+x)^2} - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{-x}{(1+x)^2}$).

C. Faux. $f(x) = x.\dfrac{\exp(x^2)-1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \times 1 = 0$: f n'est pas continue en 0.

D. Faux. $f(x) = \dfrac{\cos(x)-1}{x} = \dfrac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} \cos'(0) = 0$: f n'est pas continue en 0.

$\boxed{6}$ On se place dans un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.
Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$.
On suppose que $\mathbb{P}([X=-1]) = \mathbb{P}([X=1]) = a$ et $\mathbb{P}([X=0] = 1-2a$ où $a \in]0,1[$ est un réel fixé.
On note $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X et $V(X)$ sa variance. On est alors sûr que :

A. $\mathbb{E}(X) = 0$ et $V(X) = 1$

B. $\mathbb{E}(X) = 2a$ et $V(X) = 4a^2$.

C. $\mathbb{E}(X) = 1$ et $V(X) = 2a$.

$\boxed{\textbf{D.}\quad \mathbb{E}(X) = 0 \text{ et } V(X) = 2a.}$

En effet, d'une part $\mathbb{E}(X) = -1\mathbb{P}([X=-1]) + 0\mathbb{P}([X=0]) + 1\mathbb{P}[X=1]) = -a+a = 0$ et d'autre part $\mathbb{E}(X^2) = (-1)^2\mathbb{P}([X=-1]) + 0^2\mathbb{P}([X=0]) + 1^2\mathbb{P}[X=1]) = a+a = 2a$. Le résultat en découle puisque $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.