Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Test du 03/05/24 (Durée : 20 min)

NOM : **PRÉNOM :**

Barème :

- Question de cours : 4 points.
- QCM : dans chacun des six cas :
  - 2 points par affirmation exacte entourée ;
  - -1 point pour une affirmation fausse entourée ;
  - 0 point en l'absence de réponse.

Question de cours

Énoncer le théorème de Rolle.

QCM : Dans chacun des six cas ci-dessous, entourer **la ou les** affirmations exactes.

---

1 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ $(a < b)$. Soit $k \in \mathbb{R}$. On peut alors affirmer que :

A. f s'annule un nombre fini de fois sur $[a, b]$.

B. Si $f(a)f(b) < 0$ et si f est croissante sur $[a, b]$ alors f s'annule une unique fois sur $[a, b]$.

C. Si $f(a)f(b) < 0$ et si f n'est pas strictement monotone sur $[a, b]$ alors f s'annule au moins deux fois sur $[a, b]$.

D. Aucune des réponses précédentes.

2 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 e^{-x}$. On a alors, pour tout réel x,

A. $f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$

B. $\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n(x^2 - 2nx + n)e^{-x}$

C. $f''(x) = 2e^{-x}$

D. $\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n(x^2 - 2nx + n^2 - n)e^{-x}$

$\boxed{3}$ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On peut alors affirmer que :

A. Si f' n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$ alors f n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

B. Si f' est strictement négative sur $\mathbb{R}$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

C. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors $h : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^*$.

D. Si $g : x \longmapsto f(x) - x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{4}$ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. On fixe un réel $k \notin [a, b]$ et on considère la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x - k}$. On est alors sûr que :

A. g est dérivable sur $]a, b[$ et on a : $\forall x \in [a, b],\ g'(x) = \dfrac{f'(x)}{(x - k)^2}$.

B. $\exists c \in]a, b[\quad f'(c) = \dfrac{f(c)}{c - k}$.

C. $\exists c \in]a, b[\quad f'(c) = 1$.

D. Aucune des réponses précédentes.

$\boxed{5}$ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par l'expression ci-dessous. En posant $f(0) = 1$, on prolonge f en une fonction de classe C^1 sur $] - 1, +\infty[$ lorsque :

A. $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = 2 + \exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)$

B. $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \dfrac{\ell n\,(1 + x)}{x}$

C. $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \dfrac{\exp(x^2) - 1}{x}$

D. $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \dfrac{\cos(x) - 1}{x}$

$\boxed{6}$ On se place dans un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.
Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$.
On suppose que $\mathbb{P}([X = -1]) = \mathbb{P}([X = 1]) = a$ et $\mathbb{P}([X = 0]) = 1 - 2a$ où $a \in]0, 1[$ est un réel fixé.
On note $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X et $V(X)$ sa variance. On est alors sûr que :

A. $\mathbb{E}(X) = 0$ et $V(X) = 1$

B. $\mathbb{E}(X) = 2a$ et $V(X) = 4a^2$.

C. $\mathbb{E}(X) = 1$ et $V(X) = 2a$.

D. $\mathbb{E}(X) = 0$ et $V(X) = 2a$.