

**Corrigé rapide du test n°3 (Durée : 20 min)**

**1** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \exp(\cos x)$ . On a alors, pour tout réel  $x$ ,

- A.  $f'(x) = \exp(\cos x)$       B.  $f'(x) = \exp(-\sin x)$       C.  $f'(x) = \cos x \cdot \exp(\cos x)$   
 D.  $f'(x) = -\sin x \cdot \exp(-\sin x)$       **E. Aucun des résultats précédents.**

En effet, le théorème de dérivation des fonctions composées montre que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\sin x \cdot \exp(\cos x)$ .

**2** Soit  $f$  la fonction réelle de la variable réelle donnée par :  $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = x + 1 - x^2 \ln(x^2)$ .

- A.** On peut prolonger  $f$  en une fonction continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
 B. On ne peut pas prolonger  $f$  par continuité en 0.  
**C.** On peut prolonger  $f$  en une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .  
 D. On a :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .      E. On a :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

En effet,  $f$  est clairement continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ . D'autre part  $\lim_{X \rightarrow 0} X \ln(X) = 0$  et par suite on a  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$  et on peut prolonger  $f$  par continuité en 0 en posant  $f(0) = 1$ . Ce prolongement est dérivable puisqu'on a alors, pour  $x \neq 0$ ,  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 - x \ln(x^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ . Le prolongement de  $f$  est donc dérivable en 0 et on a  $f'(0) = 1$ . Enfin, E. est faux car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

**3** Soit  $f$  une fonction réelle de la variable réelle strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ . On peut alors affirmer que :

- A. Si  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
**B.**  $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq x$ .  
**C.** Si  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  alors :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \leq 0$ .  
 D.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .      E. Aucun des résultats précédents.

**A. Faux.** La fonction  $f$  donnée par  $f(x) = -x$  si  $x < 0$  et  $f(x) = -2x$  si  $x \geq 0$  est continue et strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$  mais n'est pas dérivable en 0.

**B. Vrai.** On aurait sinon  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < x$  et donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  ce qui est absurde puisque, par stricte décroissance,  $\forall x < 0, f(x) > f(0)$ .

**C. Vrai.** On a vu en cours que, lorsque  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$ ,  $f$  est décroissante sur  $I$  si et seulement si  $f'$  est négative sur  $I$ .

**D. Faux.**  $f : x \mapsto \exp(-x)$  est en effet strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$  mais  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

**4**

$E$  désigne la fonction partie entière.

La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée, pour  $x \in [0, 1[$ , par la formule suivante est dérivable sur  $]0, 1[$  lorsque :

**A.**  $f(x) = E(x)$

**B.**  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \neq 0 \\ 4 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

**C.**  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

**D.**  $f(x) = \begin{cases} x \ln \left( \frac{x+5}{x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

**A. Vrai.** Car c'est la fonction nulle sur  $[0, 1[$ .

**B. Faux.** Car la fonction n'est pas continue en 0 :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \neq f(0)$ .

**C. Vrai.** On a bien  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 = f(0)$  et  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$  donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ .

**D. Faux.**  $f$  est bien continue en 0 mais  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \ln \left( \frac{x+5}{x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$  donc  $f$  n'est pas dérivable en 0.

**5** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[0, 2]$ , dérivable sur  $]0, 2[$  et vérifiant  $f(0) = 0$  et  $f(2) = 2$ . On est alors sûr que :

**A.**  $f$  est croissante sur  $[0, 2]$ .

**B.**  $\exists c \in ]0, 2[ \quad f'(c) = c$ .

**C.** La fonction  $f$  a un extremum local sur  $]0, 2[$ .

**D.**  $\exists c \in ]0, 2[ \quad f'(c) = 1$ .

**E.** Aucune des réponses précédentes.

**A. Faux.** La fonction  $f : x \mapsto x^2 - x$  vérifie les hypothèses mais n'est pas croissante sur  $[0, 2]$  (on a par exemple  $f(\frac{1}{2}) < f(0)$ ).

**B. Vrai.** La fonction  $g : x \mapsto f(x) - \frac{1}{2}x^2$  est continue sur  $[0, 2]$ , dérivable sur  $]0, 2[$  et vérifie  $g(0) = g(2)$ . Le théorème de Rolle assure alors l'existence d'un  $c \in ]0, 2[$  tel que  $g'(c) = 0$  soit  $f'(c) = c$ .

**C. Faux.** La fonction  $f : x \mapsto x$  n'a pas d'extremum local sur  $]0, 2[$ .

**D. Vrai.** C'est le théorème des accroissements finis :  $\exists c \in ]0, 2[ \quad f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 1$ .