Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Corrigé rapide du test n°2 (Durée : 20 min)

1 Le nombre d'anagrammes du mot BABAS est :

$\boxed{\textbf{A.}\ 30}$ **B.** 5! **C.** 60. **D.** 42 **E.** 5^2

En effet, les lettres A et B se répétant chacune deux fois, le nombre d'anagrammes de ce mot de cinq lettres est $\dfrac{5!}{2!\,2!} = \dfrac{120}{4}$.

2 Une urne contient six boules bleues et trois boules rouges. On prélève simultanément deux boules dans l'urne. Tous les prélèvements sont supposés équiprobables.
La probabilité que les deux boules soient de la même couleur est égale à :

$\boxed{\textbf{A.}\ \dfrac{1}{2}.}$ **B.** $\dfrac{18}{72}$ **C.** $\dfrac{1}{18}$ **D.** $\dfrac{1}{3}$ **E.** $\dfrac{1}{6}$

En munissant l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble des neuf boules de la probabilité uniforme (car les tirages sont supposés équiprobables), l'évènement M : « on obtient deux boules de même couleur » est tel que $M = B \cup R$ où B (resp. R) est l'évènement « on obtient deux boules bleues (resp. rouges) ». Cette réunion étant disjointe, $\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(R)$. Or, B (resp. R) est l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble des six (resp. trois) boules bleues (resp. rouges). On a donc $\mathbb{P}(M) = \dfrac{\binom{6}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \dfrac{6 \times 5 + 3 \times 2}{9 \times 8} = \dfrac{1}{2}$.

3 La limite lorsque x tend vers 0^+ de $2x + 1 - x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$:

A. vaut $-\infty$. $\boxed{\textbf{B.}\ \text{vaut } 1.}$ **C.** vaut 0. **D.** n'existe pas. **A.** vaut $+\infty$.

On a $\lim\limits_{x\to 0} 2x+1 = 1$ et $\left|x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x| \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ donc par somme, $2x + 1 - x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$.

4 La limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $1 + \exp(\sin(x) - x)$

$\boxed{\textbf{A.}\ \text{vaut } 1.}$ **B.** vaut 0. **C.** vaut $+\infty$. **D.** vaut $-\infty$. **E.** n'existe pas.

Posons $X = \sin(x) - x$. Alors $X = x\left(\dfrac{\sin x}{x} - 1\right)$. Or $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{\sin x}{x} - 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1$ et $X \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$. Comme $\lim\limits_{X\to-\infty} \exp(X) = 0$ on a bien finalement $1 + \exp(\sin(x) - x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 + 0 = 1$ (théorème de composition des limites).

$\boxed{5}$ E désigne la fonction partie entière.

Les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ données, pour $x \in \mathbb{R}$, par les formules suivantes sont continues sur $\mathbb{R}$ lorsque :

A. $f(x) = \sin(x + 2\pi E(x))$

B. $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

C. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

D. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

E. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

A. Vrai. En effet f n'est autre que la fonction sinus (qui est 2π-périodique).

B. Faux. En effet $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 6 \neq f(2)$.

C. Faux. En effet $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 \neq f(0)$.

D. Vrai. En effet f est continue en tout $x \neq 2$ et, pour $x \neq 2$, $\dfrac{x^2-4}{x-2} = x+2 \xrightarrow[x\to 2]{} 4 = f(2)$.

E. Vrai. Ici f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et si $x \neq 0$, $\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = f(0)$

$\boxed{6}$ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On est alors sûr que :

A. Si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors f a au moins un point fixe.

B. Si f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

C. Si $f(\mathbb{R})$ n'est pas un intervalle alors f n'est pas continue.

D. Si $f(a)f(b) < 0$ alors f s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.

E. Pour que f soit continue sur $[a,b]$, il faut que f soit minorée sur $[a,b]$.

A. Faux. La fonction nulle sur le segment $[1,2]$ est continue mais n'a pas de point fixe.

B. Faux. La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$).

C. Vrai. Un résultat du cours assure que l'image d'un intervalle par une fonction continue est toujours un intervalle. Si l'image par f de l'intervalle $\mathbb{R}$ n'est pas un intervalle, c'est donc que f n'est pas continue.

D. Faux. Considérons par exemple la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1,2] \\ -1 & \text{si } x \in]2,3] \end{cases}$

On a alors $f(2)f(3) = -1 < 0$ mais pourtant f ne s'annule pas sur $[1,3]$.

Bien sûr, le résultat serait tout autre si on supposait en outre f continue...

E. Vrai. Un résultat du cours assure qu'une fonction continue sur un segment est bornée (et atteint ses bornes) donc en particulier est minorée...