

Corrigé rapide du test n°2 (Durée : 20 min)
Question de cours

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur un intervalle I . Soient $a < b$ deux éléments de l'intervalle I . Soit ℓ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe un réel c dans le segment $[a, b]$ tel que $f(c) = \ell$.

1 On lance trois dés classiques non truqués. La probabilité d'obtenir au moins deux « 6 » est :

A. $1 - \frac{1}{6^3}.$
B. $\frac{1}{6^3} + \binom{3}{2} \frac{1}{6^3}.$
C. $\frac{2}{27}.$
D. $1 - \binom{3}{1} \frac{1}{6} \frac{5}{6^2}.$

Munissons l'univers $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^3$ de la probabilité uniforme (en coloriant les dés). L'événement « On obtient trois 6 » est alors $T = \{(6, 6, 6)\}$. De même, l'événement « On obtient exactement deux 6 » est $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ où par exemple $D_1 = \{(1, 6, 6), (2, 6, 6), (3, 6, 6), (4, 6, 6), (5, 6, 6)\}$. La probabilité d'obtenir au moins deux « 6 » est alors $\mathbb{P}(T \cup D) = \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}(D_2) + \mathbb{P}(D_3)$ (réunion disjointe). Cette probabilité est donc $\frac{1}{6^3} + 3 \cdot \frac{5}{6^3} = \frac{16}{216} = \frac{2}{27}$.

2 Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}$. Soit a est un nombre réel. On suppose que D_f contient un intervalle non vide du type $]b, a[$. On peut exprimer le fait que $+\infty$ est limite de f à gauche en a par la formule :

A. $\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad (a - \delta < x < a \implies f(x) > M)$
B. $\forall M > 0 \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in D_f \quad (x \in [a - \delta, a] \implies f(x) \geq M)$
C. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad (a - \delta < x < a \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon)$
D. $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad (x \in [a - \delta, a] \implies f(x) \geq M)$

A Exact. C'est la définition du cours.

B. Faux. Le choix de $\delta = 0$ entraînerait que toutes les fonctions non définies en a auraient $+\infty$ pour limite à gauche en a .

C. Faux. Cette formule caractérise le fait que $f(a)$ est la limite de f à gauche en a .

D. Faux. La définition d'une limite de f à gauche en a est celle de $\lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x)$: elle exclut la possibilité pour x de prendre la valeur a . L'énoncé, qui précisait que D_f contient un intervalle non vide du type $]b, a[$, n'exclut pas pour autant que f soit définie en a ... C'était un peu subtile et cette proposition a été neutralisée (pas de point enlevé si cette réponse était entourée).

3 La limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $x \exp\left(\frac{1}{x}\right) - x$ est :

A. 1.

B. 0.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

On écrit $x \exp\left(\frac{1}{x}\right) - x = \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{\frac{1}{x}}$. Comme $X = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{e^X - 1}{X} \xrightarrow{X \rightarrow 0} 1$, on a bien finalement $x \exp\left(\frac{1}{x}\right) - x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ (théorème de composition des limites).

4 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On est alors sûr que :

A. Si f est continue alors $f([a, b]) = [a, b]$.

B. Si f est continue et croissante sur $[a, b]$ alors f est bijective.

C. Si $f([a, b])$ n'est pas un intervalle alors f n'est pas continue.

D. Si $f(a)f(b) < 0$ alors f s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.

E. Pour que f soit continue sur $[a, b]$, il faut que f soit majorée sur $[a, b]$.

A. Faux. En effet, si on prend $f : x \mapsto x^2$ alors f est continue et $f([1, 2]) = [1, 4] \neq [1, 2]$

B. Faux. Une fonction constante sur $[a, b]$ est croissante mais non injective donc non bijective.
Bien sûr, le résultat serait tout autre si on supposait f strictement croissante...

C. Vrai. Un résultat du cours assure que l'image d'un intervalle par une fonction continue est toujours un intervalle. Si l'image par f de l'intervalle $]a, b]$ n'est pas un intervalle, c'est donc que f n'est pas continue.

D. Faux. Considérons par exemple la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1, 2] \\ -1 & \text{si } x \in]2, 3] \end{cases}$

On a alors $f(2)f(3) = -1 < 0$ mais pourtant f ne s'annule pas sur $[1, 3]$.

Bien sûr, le résultat serait tout autre si on supposait en outre f continue...

C. Vrai. Un résultat du cours assure qu'une fonction continue sur un segment est bornée (et atteint ses bornes) donc en particulier est majorée...