Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Corrigé rapide du test n°2 (Durée : 20 min)

Question de cours

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur un intervalle I. Soient $a < b$ deux éléments de l'intervalle I. Soit ℓ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe un réel c dans le segment $[a, b]$ tel que $f(c) = \ell$.

1 Une urne contient dix jetons numérotés de 0 à 9. On en tire successivement et sans remise trois. On forme alors un nombre à trois chiffres à l'aide des trois numéros tirés que l'on range dans l'ordre croissant. Combien y a-t-il de tels nombres ?

A. $\binom{10}{3}$ **B.** 360 **C.** A_{10}^{3} **D.** 120 **E.** 720

En effet, trois chiffres distincts donnés permettent de former un unique nombre où ces trois chiffres sont rangés dans l'ordre croissant (et réciproquement). Il y a donc une bijection entre l'ensemble des nombres cherchés et les parties à trois éléments de l'ensemble des dix chiffres.
Enfin, $\binom{10}{3} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120.$

2 On se place dans un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. Si A et B sont deux évènements indépendants tels que $\mathbb{P}(A) = 0,2$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,7$ alors on est sûr que :

A. $\mathbb{P}(B) = 0,5.$ **B.** $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{7}.$ **C.** $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{7}.$ **D.** $\mathbb{P}(B) = \frac{5}{8}.$
E. Il manque une information pour calculer $\mathbb{P}(B)$.

En effet, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ et, par indépendance de A et B, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. On a donc $0,7 = 0,2 + \mathbb{P}(B) - 0,2.\mathbb{P}(B)$ soit $\mathbb{P}(B) = \dfrac{0,5}{0,8} = \dfrac{5}{8}$.

3 Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}$. Soit a est un nombre réel qui est une borne d'un intervalle ouvert non vide contenu dans D_f. On peut exprimer le fait que le réel ℓ est limite de f en a par la formule :

A. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad |x - a| < \delta$ et $|f(x) - \ell| < \varepsilon$
B. $\forall \varepsilon \geqslant 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad (|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$
C. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad (|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$
D. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \geqslant 0 \quad \forall x \in D_f \quad (|x - a| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$
E. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad (|x - a| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$

A. Faux. La formule $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in D_f \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$ entraîne f constante (égale à ℓ).

B. Faux. Le choix de $\varepsilon = 0$ entraînerait qu'aucune fonction n'aurait de limite en a.

C. Exact. Cette formule est équivalente à celle de E. En effet, celle de E. entraîne clairement celle de C. et la réciproque s'obtient en posant $\delta' = \delta/2$.

D. Faux. Le choix de $\delta = 0$ entraînerait que toutes les fonctions auraient une limite en a.

E. Exact. C'est la définition du cours.

$\boxed{4}$ La limite lorsque x tend vers 0^+ de $\dfrac{\sin(2x)}{1-\sqrt{1+x}}$ est :

A. $-\infty$. **B.** -2. $\boxed{\textbf{C.}\ -4.}$ **D.** 0.

On utilise l'expression conjuguée pour écrire :
$\dfrac{\sin(2x)}{1-\sqrt{1+x}} = -2.\dfrac{\sin(2x)}{2x}.\left(1+\sqrt{1+x}\right)$ et on utilise le résultat connu $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$ (où $X = 2x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$).

$\boxed{5}$ La limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $\dfrac{\ell n\ (2x+e^x)}{1-x}$ est :

$\boxed{\textbf{A.}\ -1.}$ **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$. **E.** $\ell n\,(2)$.

On écrit $\dfrac{\ell n\ (2x+e^x)}{1-x} = \dfrac{\ell n\ [e^x(2xe^{-x}+1)]}{1-x} = \dfrac{x+\ell n\ (2xe^{-x}+1)}{1-x}$ soit $\dfrac{\ell n\ (2x+e^x)}{1-x} = \dfrac{1+\frac{1}{x}\ell n\ (2xe^{-x}+1)}{\frac{1}{x}-1}$.
On a donc bien finalement $\dfrac{\ell n\ (2x+e^x)}{1-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1+0\times \ell n\,(1)}{0-1} = -1$ (car $xe^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$).

$\boxed{6}$ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On est alors sûr que :

A. $f([a,b]) = [a,b]$. **B.** $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. $\boxed{\textbf{C.}\ f(]a,b])\text{ est un intervalle.}}$
D. $f(]a,b[)$ est un intervalle ouvert.

En effet, si on prend par exemple $f : x \longmapsto x^2$ alors $f([1,2]) = [1,4] \neq [1,2]$, $f(\mathbb{R}) = [0,+\infty[\neq \mathbb{R}$ et $f(]-1,1[) = [0,1[$ n'est pas un intervalle ouvert. Par contre, un résultat du cours assure que l'image d'un intervalle par une fonction continue est toujours un intervalle.