Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Corrigé du test du 03/02/26

1 Soit E un ensemble à six éléments. Le nombre total de parties de E est :

A. $\binom{6}{2}$ **B.** 15 **C.** 6! $\boxed{\textbf{D.}\quad 2^6}$ **E.** 6^2

En effet, le cours a montré que le nombre de partie d'un ensemble à n éléments est 2^n.

2 Dix équipes de basketball participent à un championnat. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres exactement deux fois (à l'aller et au retour). Combien faut-il organiser de matchs ?

$\boxed{\textbf{A.}\quad A_{10}^2}$ **B.** 10! **C.** 45 **D.** 18 **E.** $\binom{10}{2}$

En effet, un match peut être vu comme un couple (équipe recevante, équipe reçue) et il y a donc autant de matchs que de 2-arrangements de l'ensemble des dix équipes.

3 On considère l'ensemble de lettres $L = \{A, B, C, D, E, F\}$ et on appelle *mot* toute liste (ordonnée) de dix lettres de L.

Combien de mots comportent à la fois sept « A » et trois « B » ?

$\boxed{\textbf{A.}\quad \binom{10}{7}}$ **B.** 6^{10} **C.** A_{10}^7 **D.** 2.7!3! **E.** $\frac{1}{7}$

En effet l'ensemble des tels mots est en bijection avec l'ensemble des parties à 7 éléments de l'ensemble des dix positions : choisir un tel mot c'est choisir la place des sept « A » dans ce mot (les autres places étant alors occupées par des « B »).

4 Le nombre d'anagrammes du mot $BARRER$ est :

A. 3.3! **B.** $\frac{6!}{3}$ $\boxed{\textbf{C.}\quad 120}$ **D.** 720 **E.** 24

• On pouvait simplement appliquer la « formule » dénombrant ces anagrammes : il y en a $\frac{6!}{3!} = 120$.
• Notons $\mathscr{A}$ l'ensemble des anagrammes du mot $BARRER$ (en voyant un mot de six lettres comme un 6-uple de lettres). On partitionne l'ensemble $\mathscr{A}$ en regroupant les mots comportant les lettres R en même position. On a alors :

$$\mathscr{A} = \bigcup_{I \subset [\![1,6]\!],\, \mathrm{Card}(I)=3} \mathscr{A}_I \text{ où, pour } I = \{i, j, k\} \subset [\![1, 6]\!],\ \mathscr{A}_I = \{(a_1, \cdots, a_6) \in \mathscr{A},\ a_i = a_j = a_k = R\}.$$

La réunion étant clairement disjointe, $\mathrm{Card}(\mathscr{A}) = \sum_{I\subset[\![1,6]\!],\,\mathrm{Card}(I)=3} \mathrm{Card}(\mathscr{A}_I) = \binom{6}{3}\mathrm{Card}(\mathscr{A}_{\{1,2,3\}})$ car tous les $\mathscr{A}_I$ ont même cardinal. Or $\mathscr{A}_{\{1,2,3\}} = \{(R,R,R,a_4,a_5,a_6)\in\mathscr{A}\}$ est en bijection avec l'ensemble $\mathscr{A}'$ des anagrammes de BAE, anagrammes qui sont au nombre de $3!$.
Au final, $\mathrm{Card}(\mathscr{C}) = \binom{6}{3}3! = 120$.

$\boxed{5}$ A, B et C désignent trois évènements correspondant à une même expérience aléatoire. Dire que au moins un évènement parmi A, B et C est réalisé signifie que le résultat de l'expérience est dans :

- **A.** **Vrai** : $A\cup B\cup C$ correspond à « au moins l'un des trois est réalisé ».
- **B.** **Faux** : $\overline{A\cap B\cap C}$ correspond à « les trois ne sont pas tous réalisés ».
- **C.** **Faux** : voir B. car $\overline{A\cap B}\cup\overline{B\cap C}\cup\overline{C\cap A} = \overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C} = \overline{A\cap B\cap C}$
- **D.** **Faux** : voir B. car $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C} = \overline{A\cap B\cap C}$.

$\boxed{6}$ On se place dans un espace probabilisé fini $(\Omega,\mathbb{P})$. Si A, B et C sont trois évènements tels que

$$\mathbb{P}(A)=0,1 \qquad \mathbb{P}(B)=0,6 \qquad \mathbb{P}(C)=0,9$$

alors on est sûr que :

- **A.** $\overline{C}=A$. **Faux.** En effet, si on a bien $\mathbb{P}(\overline{C})=\mathbb{P}(A)$, rien ne garantit que $\overline{C}=A$.
- $\boxed{\textbf{B.}\ \mathbb{P}(B\cap\overline{A})\geqslant 0,5.}$ **Exact.** En effet, $\mathbb{P}(B\cup\overline{A}) = \mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(\overline{A})-\mathbb{P}(B\cap\overline{A})\leqslant 1$ donc $\mathbb{P}(B\cap\overline{A})\geqslant 0,6+(1-0,1)-1=0,5$.
- **C.** $A\cup B\cup C=\Omega$. **Faux.** En effet, on pourrait avoir $A\subset B\subset C\cdots$
- **D.** $A\cup C=\Omega$. **Faux.** En effet, on pourrait avoir $A\subset C$ (et donc $A\cup C=C$).
- **E.** $\mathbb{P}(B\cap\overline{C})=0,1$. **Faux.** En effet, si $B\subset C$ alors $\mathbb{P}(B\cap\overline{C})=\mathbb{P}(\emptyset)=0$.

$\boxed{7}$ Une urne comporte sept boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher.

On extrait simultanément trois boules de l'urne. La probabilité d'obtenir au moins une boule de chaque couleur est :

A. $\dfrac{10}{21}$ **B.** $\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{1}{3}$ $\boxed{\textbf{C.}\ \dfrac{7}{10}}$ **D.** $\dfrac{18}{72}$ **E.** $\dfrac{2}{3}$

En munissant l'ensemble des parties à trois éléments de l'ensemble des dix boules de la probabilité uniforme (car les boules sont indiscernables au toucher), l'évènement C : « on obtient au moins une boule de chaque couleur » est tel que $\overline{C}=N\cup R$ où N (resp. R) est l'évènement « on obtient trois boules noires (resp. rouges) ». Cette réunion étant disjointe, $\mathbb{P}(\overline{B})=\mathbb{P}(N)+\mathbb{P}(R)$. Or, N (resp. R) est l'ensemble des parties à trois éléments de l'ensemble des sept (resp. trois) boules noires (resp. rouges). On a donc $\mathbb{P}(\overline{B}) = \dfrac{\binom{7}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{7\times6\times5+3\times2\times1}{10\times9\times8}$ soit $\mathbb{P}(\overline{B}) = \dfrac{7\times5+1}{10\times3\times4} = \dfrac{36}{120}$. Finalement, $\mathbb{P}(B) = 1-\dfrac{3}{10}=\dfrac{7}{10}$. On pouvait aussi calculer directement $\mathbb{P}(B)$ en partitionnant B (on obtient une noire et deux rouges ou deux noires et une rouge).