Université de Rennes

Analyse et Probabilités 2

Corrigé du test n°1

Questions de cours

On appelle ***probabilité*** sur l'univers fini Ω toute application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

(1) $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega) \qquad \mathbb{P}(A) \geqslant 0$ *(positivité)*

(2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *(totalité)*

(3) $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2 \qquad (A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B))$. *($\sigma$-additivité)*

1 Dix équipes de handball participent à un championnat. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une et une seule fois. Combien faut-il organiser de matchs ?

A. A_{10}^2 **B.** 10! $\boxed{\textbf{C.}\ 45}$ **D.** 9

En effet, il y a autant de matchs que de parties à 2 éléments de l'ensemble des dix équipes, soit $\binom{10}{2} = 45$.

2 Un code d'entrée dans une résidence est composé de cinq chiffres (ordonnés). (Pour rappel, les chiffres sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.)

Combien de tels codes comportent exactement un « 0 », un « 2 », un « 5 » et deux « 3 » ?

$\boxed{\textbf{A.}\ \binom{5}{2}.3!}$ **B.** 10 $\boxed{\textbf{C.}\ 60}$ **D.** 5!

On peut en effet voir un code comme un 5-uplet de chiffres. Si on note $\mathscr{C}$ l'ensemble des codes comportant exactement un « 0 », un « 2 », un « 5 » et deux « 3 », on a alors :
$\mathscr{C} = \bigcup_{I \subset [\![1,5]\!], \mathrm{Card}(I)=2} \mathscr{C}_I$ où, pour $I = \{i, j\} \subset [\![1, 5]\!]$, $\mathscr{C}_I = \{(a_1, \cdots, a_5) \in \mathscr{C},\, a_i = a_j = 3\}$. La réunion étant clairement disjointe, $\mathrm{Card}(\mathscr{C}) = \sum_{I \subset [\![1,5]\!], \mathrm{Card}(I)=2} \mathrm{Card}(\mathscr{C}_I) = \binom{5}{2} \mathrm{Card}(\mathscr{C}_{\{1,2\}})$ car tous les $\mathscr{C}_I$ ont même cardinal. Or $\mathscr{C}_{\{1,2\}} = \{(3, 3, a_3, a_4, a_5) \in \mathscr{C}\}$ est en bijection avec l'ensemble des permutations de $\{0, 2, 5\}$ (qui sont au nombre de $3\,!$).
Au final, $\mathrm{Card}(\mathscr{C}) = \binom{5}{2} 3! = 60$. Cette formule correspond à la vision intuitive du choix de la position des deux « 3 » puis au placement des trois chiffres restant.
On pouvait également voir un code solution comme une anagramme de 02533 et appliquer la « formule » dénombrant ces anagrammes : il y en a $\dfrac{5!}{2!} = 60$.

3 Un jeu de 32 cartes est constitué des cartes 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As dans chacune des quatre couleurs trèfle ♣, carreau ♢, coeur ♡ et pique ♠.
Combien de mains de trois cartes comportent exactement un seul roi et un seul carreau ♢ ?

A. $\binom{4}{1}\binom{8}{1}\binom{20}{1}$ **B.** 640 $\boxed{\textbf{C.} \quad 651}$ $\boxed{\textbf{D.} \quad \binom{21}{2}+\binom{3}{1}\binom{7}{1}\binom{21}{1}}$

Attention au roi de carreau ! On peut en effet partitionner l'ensemble des telles mains en :
• celles qui contiennent le roi de carreau et deux autres cartes qui ne sont ni des carreaux ni des rois (il y a $32-8-3=21$ telles cartes) : ces mains sont au nombre de $\binom{21}{2}$.
• celles qui comportent un roi qui n'est pas celui de carreau, un carreau (parmi les sept qui ne sont pas le roi) et une autre carte qui n'est ni un carreau ni un roi : ces mains sont au nombre de $3\times 7\times 21$.
Il y a donc au total $\binom{21}{2}+3\times 7\times 21=210+441=651$ mains possibles.

4 A, B et C désignent trois évènements correspondants à une même expérience aléatoire. Dire que exactement deux évènements parmi A, B et C sont réalisés signifie que le résultat de l'expérience est dans :

A. **Faux** : $A\cup B\cup C$ correspond à « au moins l'un des trois est réalisé ».

B. **Faux** : $\overline{A\cap B\cap C}$ correspond à « les trois ne sont pas tous réalisés ».

C. **Faux** : voir B. car $\overline{A\cap B}\cup\overline{B\cap C}\cup\overline{C\cap A}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{A\cap B\cap C}$

$\boxed{\textbf{D.} \quad (A\cap B\cap\overline{C})\cup(B\cap C\cap\overline{A})\cup(C\cap A\cap\overline{B})}$ **Exact !**

E. **Faux** : voir B. car $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{A\cap B\cap C}$

5 On se place dans un espace probabilisé fini $(\Omega,\mathbb{P})$. Si A, B et C sont trois évènements tels que

$$\mathbb{P}(A)=0,2 \qquad \mathbb{P}(B)=0,6 \qquad \mathbb{P}(C)=0,8$$

alors on est sûr que :

A. $\overline{C}=A$. **Faux.** En effet, si on a bien $\mathbb{P}(\overline{C})=\mathbb{P}(A)$, rien ne garantit que $\overline{C}=A$.

$\boxed{\textbf{B.} \quad \mathbb{P}(B\cap C)\geqslant 0,4.}$ **Exact.** En effet, $\mathbb{P}(B\cup C)=\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(B\cap C)\leqslant 1$ donc

$$\mathbb{P}(B\cap C)\geqslant 0,6+0,8-1.$$

C. $\mathbb{P}(A\cup B\cup C)=1$. **Faux.** En effet, on pourrait avoir $A\subset B\subset C\cdots$

D. $\mathbb{P}(A\cup B)\leqslant 0,8$. **Faux.** En effet, si $A\subset B$ alors $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(B)=0,6$.

6 Une urne comporte six boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher.

On extrait simultanément deux boules de l'urne. La probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est :

A. $\dfrac{1}{18}$ $\boxed{\textbf{B.} \quad \dfrac{1}{2}}$ **C.** $\dfrac{4}{27}$ **D.** $\dfrac{18}{72}$

En munissant l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble des neuf boules de la probabilité uniforme (car les boules sont indiscernables au toucher), l'évènement B : « on obtient deux boules de couleurs différentes » est tel que $\overline{B}=N\cup R$ où N (resp. R) est l'évènement « on obtient deux boules noires (resp. rouges) ». Cette réunion étant disjointe, $\mathbb{P}(\overline{B})=\mathbb{P}(N)+\mathbb{P}(R)$. Or, N (resp. R) est l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble des six (resp. trois) boules noires (resp. rouges). On a donc $\mathbb{P}(\overline{B})=\dfrac{\binom{6}{2}+\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}}=\dfrac{6\times 5+3\times 2}{9\times 8}=\dfrac{1}{2}$. On pouvait aussi calculer directement $\mathbb{P}(B)$.